

对称群笔记

WENCHAO ZHANG

Bar-Ilan University

2020年6月29日

修订时间: 2020年7月9日

摘要

这是 B. E. Sagan 的 The Symmetric Group [1] (GTM203) 以及 Ron Adin 对称群课程的综合笔记。内容也是主要参考上述教材和 Adin 的 Lecture Notes [2]。

目录

1 基本概念	4
1.1 循环型	4
1.2 逆序集与逆序集	5
1.3 交错群	6
1.4 对称群的推广	6
1.4.1 圈积	7
2 置换统计	9
2.1 置换统计的生成函数	9
2.1.1 逆序数的生成函数	9
2.1.2 循环数的生成函数	10
2.2 置换统计的统计量	11
2.2.1 逆序数的置换统计	12
2.2.2 循环数的置换统计	13
2.2.3 下降数/上升数的生成函数	14
2.2.4 主指标的置换统计	15
3 Coxeter群与S_n的展示	17
3.1 Coxeter群	17
3.2 Coxeter-Dynkin图	19
3.2.1 反射群的Coxeter图	19
3.2.2 Coxeter 矩阵与Coxeter 图的关系	22
3.3 0-Hecke 么半群	22
4 标准杨表	23

4.1	标准杨表简介	23
4.1.1	普通、斜角和移位的形状	25
4.1.2	图表的标准杨表解释	26
4.2	RSK 算法	27
4.2.1	RSK 算法的一个应用	29
4.2.2	半标准杨表和RSK算法	31
4.2.3	淘气游戏	32
4.3	各种形状的标准杨表数量公式	34
4.3.1	勾形	34
4.3.2	两行形	35
4.3.3	之字形	36
4.3.4	斜条形	37
4.3.5	普通形 (杨图)	37
4.3.6	斜角形	38
4.3.7	移位形	40
4.3.8	截断形	41
4.3.9	勾长公式的证明历史	42
5	群的表示	43
5.1	群与群的矩阵表示	43
5.2	G -模和群代数	44
5.3	可约性	48
5.3.1	完全可约性和 Maschke 定理	49
5.3.2	Schur引理	51
5.4	群的特征标	52
5.4.1	特征标的内积	53
5.4.2	群代数分解和第二类特征标关系	55
5.5	限制表示和诱导表示	57
6	S_n 的表示	59
6.1	λ -报和 M^λ 模	59
6.2	Specht模与 S_n 的不可约表示	61
6.2.1	行列关系与比较定理	61
6.2.2	S^n 的不可约表示	62
6.2.3	标准样表和 S^λ 的基	63
6.3	分支规则	64
6.3.1	广义杨表	65
6.4	S_n 的特征标公式	66
6.4.1	Murnaghan-Nakayama 规则	66
6.4.2	Roichman公式	67
6.5	Okounkov-Vershik方法	68
7	对称函数	69
7.1	对称函数环	69
7.2	Schur 函数	71
7.2.1	Jacobi-Trudi 行列式	72

7.3 特征映射	73
7.4 Littlewood-Richardson规则	73
7.5 拟对称函数	74
参考文献	76
索引	78

1 基本概念

这一节我们引入置换和对称群的基本定义和概念。

定义 1.1. (对称群) 我们记 $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ 。一个**置换** π (permutation) 由任意一个 $[n]$ 的**自双射**构成:

$$\pi: [n] \rightarrow [n],$$

而包含所有置换的群称之为**对称群** (Symmetric group) S_n , 即

$$S_n = \{\pi \mid \pi: [n] \rightarrow [n]\}.$$

置换 π 有三种表达形式, **两行形式**、**一行形式**以及**循环形式** (cycle form). 最直观的是两行形式, 可以省略第一行的自然序列得到一行形式.

注记 1.2. 对于 $n \geq 3$, S_n 是非交换群.

注意 1.3. 对于任意 $k \leq n$, 存在唯一的嵌入 $\varphi: S_k \rightarrow S_n$, 使得

$$\pi \mapsto (\pi(1), \dots, \pi(k), k+1, \dots, n).$$

1.1 循环型

我们可以用**循环型**(cycle type)来表示一类置换:

$$(1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n})$$

我们也可以使用整数的**分拆**(partition)来表示循环型, 假设整数满足 $n = \sum_{i=1}^l \lambda_i$, $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_l$, 则定义

$$\text{Cyc}(\pi) = \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l).$$

其中, 置换中的1-循环我们称之为**固定点**(fixed point)。

注记 1.4. 对任意置换, 循环内可以**轮换**, 不同的循环之间可以任意置换, 使之不会影响置换本身.

如果置换 π 满足 $\pi^2 = e$, 我们称之为**对合**(involution)。对合的 cycle type 为 $(1^{m_1}, 2^{n-m_1}, 3^0, \dots, n^0)$.

如果置换的 cycle type 为 $(1^{n-2}, 2^1)$ (即存在唯一一个2-cycle), 则成为**对换**(Transposition). 对换是一种对合。任何一个置换都能写成多个对换的复合。令 $\pi = \tau_1 \cdots \tau_k$, 其中 τ_i 是对换, 那么我们可以定义 π 的**符号函数** Sign:

$$\text{Sign}(\pi) = (-1)^k.$$

1.2 逆序集与逆序数

定义 1.5. (逆序及逆序数) 对任意 $1 \leq i, j \leq n$, 以及 $\pi \in S_n$, 如果满足

$$i < j \wedge \pi(i) > \pi(j)$$

则称 (i, j) 为 π 的**逆序** (inversion). 进一步地我们称如下集合为逆序集 (inversion set):

$$\text{Inv}(\pi) = \{(i, j) | i < j, \pi(i) > \pi(j)\}.$$

逆序数 定义为逆序集的基数,

$$\text{inv}(\pi) = |\text{Inv}(\pi)| = \#\{(i, j) | i < j, \pi(i) > \pi(j)\}.$$

注意 1.6. 逆序数满足 $\text{inv}(\pi) = \text{inv}(\pi^{-1})$.

定义 1.7. 由逆序数也可以进一步定义符号函数 $\text{Sign}(\pi)$.

$$\text{Sign}(\pi) := (-1)^{\text{inv}(\pi)} = (-1)^{\sum_{i=1}^t (k_i - 1)} = (-1)^{n - \text{cyc}(\pi)} \in \{-1, 1\}.$$

其中 k_i 表示循环型的循环大小.

进一步地, 我们有

$$\text{Sign}(\pi) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i}$$

注意 1.8. 符号函数满足 $\forall \pi, \sigma \in S_n$,

$$\text{Sign}(\pi \circ \sigma) = \text{Sign}(\pi) \cdot \text{Sign}(\sigma)$$

这一结果利用上述关于符号函数的等式即可验证.

有关于逆序数和逆序集的更多性质如下:

$$1. \text{Inv}(\pi \circ \sigma) = \text{Inv}(\sigma) \Delta \sigma^{-1}((\pi)),$$

2. $\text{inv}(\pi \circ \sigma) \equiv \text{inv}(\sigma) + \text{inv}(\pi) \pmod{2}$.
3. $\text{Sign}(\pi) = (-1)^{\sum_{i=1}^t (k_i - 1)}$, 其中 k_i 为 k_i -cycle 的循环数. 比如 $\pi = (136)(25)(4)$, 则 $\text{Sign}(\pi) = (-1)^{2+1+0} = -1$.
4. $\text{Sign}(\pi) = (-1)^{n - \text{cyc}(\pi)}$, 其中 $\text{cyc}(\pi)$ 称为(总)循环数(cycle number), 即(包含 1-循环的)括号的数量.

1.3 交错群

我们定义符号函数为1的置换为**偶置换**(even), 符号函数为-1的为奇置换. S_n 中所有的偶置换定义为交错群 A_n ,

$$A_n := \{\pi \in S_n \mid \text{Sign}(\pi) = 1\}.$$

因此 A_n 可以看成群同态 Sign 的核:

$$\text{Sign}: S_n \rightarrow \{1, -1\}.$$

Cayley定理声称所有群 G 同构于在 G 上的对称群的子群. 这可以被理解为群 G 在 G 中元素上的群作用的一个例子. 集合 G 的置换是任何从 G 到 G 的双射函数; 所有这种函数的集合形成了在函数复合下的一个群, 叫做“ **G 上的对称群**”并写为 $\text{Sym}(G)$.

注意 1.9. A_n, S_n 的正规子群:

1. 对任意 $n \neq 4$, S_n 的全部正规子群为 $S_n, A_n, \{\text{Id}\}$.
2. 对任意 $n \neq 4$, A_n 的全部正规子群为 $A_n, \{\text{Id}\}$. ($\forall n \geq 5$, A_n 是单群)

关于 A_n 是单群的证明参见 Adin 的讲义[2]中的 A_n is simple 或 [Morandi 的笔记](#).

1.4 对称群的推广

定义 1.10. 广义对称群 (Generalized symmetric group) 是循环群 C_m 和对称群 S_n 的圈积 (Wreath product).

$$S(m, n) := C_m \wr S_n$$

$m = 1$ 时的广义对称群即为对称群 S_n ; $m = 2$ 时的广义对称群称之为**标记对称群** (Signed symmetric group) B_n . 循环群 C_2 用于选择正负号, S_n 用于选择 n 维坐标点. 我们定义 B_n 如下:

$$B_n = \{\pi | \pi: [\pm n] \rightarrow [\pm n], \text{ s.t. } \pi(-i) = -\pi(i) \forall i \in [\pm n]\}.$$

其中 $[\pm n] = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm n\}$. 关于 B_n , 我们有如下性质:

1. $|B_n| = 2^n \cdot n!$
2. B_n 是 n 维正单纯形的对称群, 正单纯形的顶点坐标是 $(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$.
3. 正轴形的顶点坐标都是 $(\pm 1, 0, 0, \dots, 0)$ 的全排列, 它的 $(n-1)$ 维表面是 $(n-1)$ 维的**正单纯形**, 而正轴形的**顶点图** (即几何图形切去一个角的截面) 是 $(n-1)$ 维的另一正轴形。
4. 正轴形是 n 维正方体(**超方形**)的**对偶多胞形**.
5. B_n 内“置换”的符号表示: $\pi \mapsto (a_{ij}) \in \{0, 1, -1\}$. 比如 $\pi = (-3, 1, -2)$, 则有

$$\varphi(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_n(\mathbb{F}).$$

1.4.1 圈积

圈积 (Wreath product, 日语译为轮积) 是基于群的半直积的一种群的乘法. 在这里我们仅仅考虑没有限制的圈积. 令 A 和 H 为群, H 作用在集合 Ω 上. 令 $K = \prod_{\omega \in \Omega} A_\omega$ 为由 Ω 索引的 $A_\omega := A$. 则 K 的元素可以看作为 (a_ω) 的任意序列, 并且拥有分量逐个的乘积. H 在 Ω 上的作用可以自然拓展到 K 中

$$h(a_\omega) = (a_{h^{-1}\omega})$$

因此, 没有限制的圈积 $A \text{ Wr}_\Omega H := A \wr H = K \rtimes H$. 群 K 又被称为圈积的基. 通常我们会选择 $\Omega = H$, 此时称为**正规**(regular)圈积.

有限制的圈积的定义类似, 只不过 K 的定义中的直积改为直和即可. (无限的情况, 直和必须只有有限项非平凡, 直积可以无限项.)

常见的例子有**广义对称群**: $C_m \wr S_n$, 此时的基为 C_m^n , 群作用 $\varphi: S_n \rightarrow \text{Aut}(C_m^n)$ 由下式给出:

$$\varphi(\sigma)(a_1, \dots, a_n) = (a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}).$$

注意到, $|C_k \wr S_n| = k^n \cdot n!$

$$C_1 \wr S_n = S_n$$

$$C_2 \wr S_n = B_n$$

$$C_k \wr S_n \cong C_k^n \rtimes S_n$$

2 置换统计

这一节的主要内容是介绍置换统计，即把置换看作一种随机变量来研究其期望、方差等性质。本节以 ADIN 课程的第二、三课内容为基础，参考他讲义 [2] 中的第三课(第6页之后)、第四课和第五课。关于置换统计的更多内容可以参见 STANLEY 的 Enumerative Combinatorics [6]。ADIN 和 ROICHMAN 的综述文章 [3] 第10节中也有简单的置换统计的内容。

2.1 置换统计的生成函数

定义 2.1. (Permutation Statistics) 置换统计是一个群同构 $\rho: S_n \rightarrow R$ ，其中 R 是一个离散群。通常我们会选取正整数集 $R = \mathbb{Z}_+$ 。

Example 2.2. $\rho: S_n \rightarrow [n], \pi \mapsto \pi(1)$.

我们常常使用生成函数来考虑任意一个置换统计 $\rho: S_n \rightarrow \mathbb{Z}_+$ 。

$$\text{gf}_n(\rho) = \sum_{\pi \in S_n} q^{\rho(\pi)} \in \mathbb{Z}[q].$$

另一方面我们可以得到，

$$\text{gf}_n(\rho) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_+} \#\{\pi \in S_n \mid \rho(\pi) = i\} \cdot q^i$$

下面我们来考察一下常见的几个置换的生成函数：

2.1.1 逆序数的生成函数

我们已经知道逆序数 $\text{inv}(\pi) = \#\{(i, j) \mid i < j, \pi(i) > \pi(j)\}$ 。

例 2.3. 我们来考虑 S_3 这个情形。我们知道每个置换的逆序数如下表(此处我们用的是单行表示法)：

π	123	132	213	231	312	321
$\text{inv}(\pi)$	0	1	1	2	2	3

于是我们可以得到逆序数的置换统计

$$\text{gf}_3(\text{inv}) = q^0 + q^1 + q^1 + q^2 + q^2 + q^3 = (1 + q)(1 + q + q^2).$$

一般地，我们有如下命题：

命题 2.4.

$$\text{gf}_n(\text{inv}) = \sum_{\pi \in S_n} q^{\text{inv}(\pi)} = \prod_{i=1}^n [i]_q =: [n]_q!$$

其中 $[i]_q := \frac{1-q^i}{1-q} = 1 + q + \cdots + q^{i-1}$, $i \in \mathbb{Z}$.

证明. (概要) 组合的证明方法是利用数学归纳法，把新的 n 放在第 k 位置。则新的置换 $\tilde{\pi}$ 满足

$$\text{inv}(\tilde{\pi}) = \text{inv}(\pi) + (n - 1 - k)$$

于是我们有

$$\text{gf}_n(\text{inv}) = \sum_{\pi \in S_{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} q^{\text{inv}(\pi) + (n-1-k)} = \sum_{\pi \in S_{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-1-k} = \text{gf}_{n-1}(\text{inv}) \cdot [n]_q. \quad \square$$

注意 2.5.

$$0 \leq \text{inv}(\pi) \leq \binom{n}{2}, \forall \pi \in S_n.$$

2.1.2 循环数的生成函数

下面我们首先通过一个例子给出**循环数**的定义，如果一个置换 $\pi = (134)(25) \in S_5$ ，则它的循环数 $\text{cyc}(\pi) = 2$ 。也就是说循环数就是置换对应的循环形式的子循环个数。

下面我们先考察 S_3 的置换统计

例 2.6. S_3 的每个置换对应的循环数如下表（ π 为单行表示法书写）：

π	123	132	213	231	312	321
$\text{cyc}(\pi)$	3	2	2	1	1	2

于是循环数的生成函数为

$$\text{gf}_3(\text{cyc}) = 2q + 3q^2 + q^3 = q(1+1)(2+q)$$

我们猜想对于 S_n ，我们有

命题 2.7.

$$\text{gf}_n(\text{cyc}) = \prod_{i=1}^n (q + i - 1)$$

证明. 证明的方法是使用逆向归纳法，讨论 n 是否是固定点。 n 是固定点的情况有一种，这种情况下循环数增加1；而 n 不是固定点的情况是 $n-1$ 种，在这种情况下循环数不变。因此，

$$\text{gf}_n(\text{cyc}) = \text{gf}_{n-1}(\text{cyc})[1 \cdot q^1 + (n-1) \cdot 1]. \quad \square$$

关于循环数的置换统计，我们还有另外一种形式，即

命题 2.8.
$$\text{gf}_n(\text{cyc}) = \sum_{k=1}^n c(n, k) q^k.$$

其中 $c(n, k)$ 称为无符号的斯特林数 (*Unsigned Stirling Numbers*)，也称为高斯二项式系数。

它与斯特林数 $s(n, k)$ 的关系是： $s(n, k) = (-1)^{n-k} c(n, k)$. 显然无符号的斯特林数满足如下性质：

1. $c(n, k) = c(n-1, k-1) + (n-1)c(n-1, k)$
2. $c(n, 0) = 0 \ (n \geq 1)$
3. $c(0, k) = 0 \ (k \geq 1)$
4. $c(0, 0) = 1$

2.2 置换统计的统计量

假设一个置换统计 $\rho: S_n \rightarrow \mathbb{Z}_+$ ，我们可以把它的生成函数看作一个随机变量。

$$P(q) = \text{gf}_n(\rho) := \sum_{\pi \in S_n} q^{\rho(\pi)}.$$

于是我们可以考虑它的**期望**和**方差**等等。

$$E[\rho] := \frac{1}{|S_n|} \sum_{\pi \in S_n} \rho(\pi) = \frac{P'(q)}{P(q)} \Big|_{q=1}$$

我们考虑例子 $P(q) = \text{gf}_3(\text{cyc}) = 2q + 3q^2 + q^3$ ，则 $E[P] = \frac{2+3 \cdot 2+3}{2+3+1} = \frac{11}{6}$.

置换统计期望还能写成另外一种形式，即

$$L(q) := (\ln P(q))' = \frac{P'(q)}{P(q)}$$

则 $E[q] = L(1) = L(q)|_{q=1}$. 进一步地, 我们可以计算方差

$$\begin{aligned} \text{Var}[\rho] &:= E[(\rho - E[\rho])^2] = E[\rho^2] - E[\rho]^2 \\ &= \frac{1}{|S_n|} \sum_{\pi \in S_n} \rho(\pi)^2 - L(1)^2 \\ &= \frac{P''(1) + P'(1)}{P(1)} - \left(\frac{P'(1)}{P(1)} \right) \\ &= \left(\frac{P'(q)}{P(q)} \right)' \Big|_{q=1} + L(1) = L'(1) + L(1). \end{aligned}$$

2.2.1 逆序数的置换统计

我们来考虑 $\rho = \text{inv}$, 并求它的期望。

$$P(q) = [n]_q! = \prod_{k=1}^n (1 + q + \cdots + q^{k-1})$$

函数 $L(q) = (\ln(P(q)))' = \sum_{k=1}^n \frac{1 + 2q + \cdots + (k-1)q^{k-2}}{1 + q + \cdots + q^{k-1}}$, 于是

$$L(1) = \sum_{k=1}^n \frac{1 + 2 + \cdots + (k-1)}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{k(k-1)}{2k} = \frac{n(n-1)}{4}.$$

我们还可以通过考虑回文置换 $\omega_0 = (1, n)(2, n-1) \dots$ 来求得这一结果。对任意的 $\pi \in S_n$, 我们有

$$\text{inv}(\pi\omega_0) = \binom{n}{2} - \text{inv}(\pi)$$

令双射 $\varphi: S_n \rightarrow S_n$, $\pi \mapsto \pi\omega_0$, 则上式等价于 $\text{inv}(\varphi(\pi)) = \binom{n}{2} - \text{inv}(\pi)$. 于是

$$P(q) = \sum_{\pi \in S_n} q^{\text{inv}(\pi)} = \sum_{\pi \in S_n} q^{\text{inv}(\varphi(\pi))} = \sum_{\pi \in S_n} q^{\binom{n}{2} - \text{inv}(\pi)} = q^{\binom{n}{2}} P(q^{-1}).$$

由回文的性质我们有

$$E[\rho] = \frac{\binom{n}{2}}{2}.$$

事实上, 令 $d = \binom{n}{2}$, 则有 $P(q) = q^d P(q^{-1})$, $P'(q) = dq^{d-1}P(q^{-1}) + q^d P'(q^{-1})(-q^{-2})$, 令 $q=1$, 我们有 $2P'(1) = dP(1)$, $L(1) = \frac{d}{2}$. 于是 $E[\text{inv}] = \frac{n(n-1)}{4}$.

2.2.2 循环数的置换统计

接下来的例子是求 $\rho = \text{cyc}$ 的期望。在此之前我们需要引入一些其他的置换统计。第一个引入的概念是从左到右最大值的数量 (the number of left-to-right-maxima)

我们定义其如下:

$$\text{ltrmax}(\pi) := \#\left\{j \mid \pi(j) = \max_{1 \leq i \leq j} \pi(i)\right\}$$

比如对于

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in S_5$$

因为第一位, 第三位, 第四位满足从左往右最大, $\text{ltrmax}(\pi) = 3$.

那么第一个问题就是它的生成函数是什么? 容易求得

$$\sum_{\pi \in S_3} q^{\text{ltrmax}(\pi)} = 2q + 3q^2 + q^3 = q(q+1)(q+2)$$

这一结果和 cyc 在 S_3 的生成函数一致! 事实上, 我们有

命题 2.9.
$$\sum_{\pi \in S_n} q^{\text{ltrmax}(\pi)} = \sum_{\pi \in S_n} q^{\text{cyc}(\pi)} = \prod_{k=1}^n (q+k-1).$$

证明. 证明的方法和 cyc 的生成函数类似, 不过我们考虑的是添加 1 而非 n . \square

另外一种更有技巧的证明如下: 我们只需要寻找一个双射 $\varphi(\pi_1) = \pi_2 \Rightarrow \text{cyc}(\pi_1) = \text{ltrmax}(\pi_2)$. 我们定义双射如下, 对于一个循环形式的置换, 我们先挑选每个循环内的最大值, 再将其开头一个元素从小往大排序, 得到一个一行形式。

比如 $\pi_1 = (137)(562)(4)$, 对应的每个循环内的最大值为 7, 6, 4, 因此我们排序为 4, 6, 7, 再将内部循环添加进去也就有

$$\pi_1 = (137)(562)(4) = (4)(625)(713)$$

于是 $\pi_2 = 4625713$ 这一行形式, 即

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 5 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1457326)$$

这一映射是双射，因为逆运算是从左往右找最大值，如果到下一个不再是那么就截断成一个循环。比如这里 4 之后要截断，5 之后要截断，于是

$$\pi'_1 = (4)(625)(713) = \pi_1.$$

事实上，类似的置换统计有 rtlmin 和 rtlmax ，它们拥有同样的置换统计，证明方法就是添加 n ，或者类似地寻找一个到 cyc 的双射。

2.2.3 下降数/上升数的生成函数

我们先定义下降集 (descent set) 如下：

定义 2.10. (下降集和下降数)

$$\text{Des}(\pi) := \{1 \leq i \leq n-1 \mid \pi(i) > \pi(i+1)\}$$

也就是说下降集是每一个下降的位置。下降数定义为下降集的基数，即

$$\text{des}(\pi) := |\text{Des}(\pi)|.$$

比如下面的例子：

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in S_7$$

则 $\text{Des}(\pi) = \{1, 3, 5, 6\}$ ，于是 $\text{des}(\pi) = 4$ 。

类似的我们可以定义上升集 (exceedant set) 和上升数 exc 。也容易求的上面的例子的上升数等于2。

我们容易计算生成函数 $\text{fg}_3(\text{des})$ 和 $\text{fg}_3(\text{exc})$

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in S_3} q^{\text{des}(\pi)} &= 1 + 4q + q^2 \\ \sum_{\pi \in S_3} q^{\text{exc}(\pi)} &= 1 + 4q + q^2 \end{aligned}$$

类似地，我们还可以定义弱上升数(weak exceedant number)和弱下降数(weak descent number)，这只需要把定义中的大于号或者小于号改为大于等于或小于等于。而对于 S_3 的弱上升数，我们有

$$\sum_{\pi \in S_3} q^{\text{wexc}(\pi)} = q + 4q^2 + q^3 = q(1 + 4q + q^2).$$

我们容易猜想得到如下结论：

命题 2.11. (Eulerian distribution)

$$\sum_{\pi \in S_n} q^{1+\text{des}(\pi)} = \sum_{\pi \in S_n} q^{1+\text{exc}(\pi)} = \sum_{\pi \in S_n} q^{\text{wexc}(\pi)} = A_n(q)$$

其中 $A_n(q)$ 称为欧拉多项式，满足 $\frac{A_n(q)}{(1-q)^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^n q^k$.

这一命题的证明利用了 Eulerian distribution 的很多性质，此处不详细讨论，进一步讨论和完整证明可以参见 Stanley 的 Enumerative Combinatorics [6] 的第一章。

2.2.4 主指标的置换统计

定义 2.12. 主指标 (*major index*) 也是一个置换统计，定义为

$$\text{maj}(\pi) := \sum_{i \in \text{Des}(\pi)} i,$$

即所有下降集的和。

比如下面的例子： $\pi = 153264$ (一行形式)。容易求得它的下降集为 $\{2, 3, 5\}$ ，因此主指标 $\text{maj}(\pi) = 2 + 3 + 5 = 10$ 。我们还能快速地计算得出 S_3 的主指标的置换统计生成函数。

$$\sum_{\pi \in S_3} q^{\text{maj}(\pi)} = 1 + 2q + 2q^2 + q^3 = (1+q)(1+q+q^2)$$

这似乎和逆序数的生成函数相同！

事实上，我们有如下结论：

定理 2.13. (MacMahon, 1913)

$$\sum_{\pi \in S_n} q^{\text{maj}(\pi)} = \sum_{\pi \in S_n} q^{\text{inv}(\pi)} = \prod_{i=1}^n (1 + q + \cdots + q^{i-1}) = [n]_q!$$

这一结果又被称为 Mahonian 分布 (Mahonian distribution)。它的组合证明比较繁琐，最早是由 Foata 在1968年PNAS给出，这一证明还能在 D. Knuth 的 Art of Computer Programming (Vol3, pp12, 581) 找到。我们将通过例子来理解这一构造性的证明。

例 2.14. 令 $\pi_1 = 53124 \in S_5$ ，则 $\text{maj}(\pi_1)$ 会和 $\text{inv}(\pi_2)$ 对应，对应关系如下表：

表格 2.1. 主指标与逆序数的一一对应

$\text{maj}(\pi_1)$	π_1	π'_1	π'_2	π_2	$\text{inv}(\pi_2)$
0	5			5	0
1	53	5	5	53	1
3	531	53	53	531	3
3	5312	531	531	1532	3
3	53124	5312	1532	13524	3

3 Coxeter群与 S_n 的展示

群的展示是指通过指定生成元的集合 S 使得这个群的所有元素都可以写为某些这种生成元的乘积和这些生成元之间的关系的集合 R ，称 G 有**展示** $\langle S|R \rangle$ 。简单的说， G 有上述展示如果它是 S 所生成的只服从关系 R 的“最自由的群”。

在引入群的展示和接下来的 Coxeter 群过程中我们还会继续讨论一些有意思的置换统计，比如置换的生成元个数等等。

3.1 Coxeter群

Coxeter群 (Coxeter group) 是一类由空间中对**超平面**的镜射生成的群。**二面体群**与**正多胞体**的对称群都是例子；此外，**根系**对应到的**外尔群**也是考克斯特群。Coxeter群可以用群的展示方法表达：

定义 3.1. (Coxeter 群) Coxeter 群是一个由满足一些交互关系的生成元生成的群

$$\langle r_1, r_2, \dots, r_n \mid (r_i r_j)^{m_{ij}} = 1 \rangle$$

其中 $m = (m_{ij})_{ij}$ 称为**Coxeter矩阵**， $m_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 满足

1. $m_{ii} = 1$ (对角线为1)
2. $m_{ij} \geq 2$ 对任意 $i \neq j$ (其他位置大于等于2)

令这组生成元为 S ，则我们称 (G, S) 为Coxeter群。

注记 3.2.

- i. $m_{ij} = \infty$ 指的是 $(r_i r_j)^m$ 恒不等于单位元，也就是指 r_i, r_j 是相对自由的。
- ii. 注意到 $m_{ii} = 1$ 等价于 $r_i^2 = e$ ，也就是说所有的生成元都是对合；
- iii. 若 $m_{ij} = 2$ ，则 $r_i r_j = r_j r_i$ (r_i, r_j 可交换的)。
- iv. 为了减少冗余可以约定 $m_{ij} = m_{ji}$ 。事实上，如果 $(xy)^m = 1$ ，因为 $yy = 1$ ，于是有

$$(yx)^m = (yx)^m y y = y(xy)^m y = y y = 1.$$

对于对称群 S_n ，我们令 $s_i = (i, i+1)$ ，则 S_n 可以被 s_i ($1 \leq i \leq n-1$)展示：

1. $s_i^2 = 1$
2. $s_i s_j = s_j s_i$ for $|i - j| > 1$
3. $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ ($1 \leq i \leq n-2$) (braid relation)

也就是说我们有

$$S_n = \left\langle s_1, s_2, \dots, s_{n-1} \mid \begin{array}{l} s_i^2 = 1 \\ s_i s_j = s_j s_i \quad (|i - j| > 1) \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-2) \end{array} \right\rangle.$$

S_n 也是Coxeter群。当 $n=4$, 我们可以得到它的Coxeter矩阵:

$$(m_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

由此我们可以得到 S_4 的另一个展示 (作为Coxeter 群)

$$S_4 = \langle s_1, s_2, s_3 | s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = (s_1 s_2)^3 = (s_2 s_3)^3 = 1 \rangle.$$

对于 S_n 它是一个Coxeter群, 置换是 s_i , 关系为 $(s_i s_{i+1})^3 = 1$. 也就是说我们有

命题 3.3. $S_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} | s_{n-1}^2 = s_i^2 = (s_i s_{i+1})^3 = 1, \forall 1 \leq i \leq n-2 \rangle$.

我们接下来定义 S_n 里的任意置换的长度 $l(\pi)$ (这一定义可以推广到任意coxeter群, 甚至任意群)

$$l(\pi) := \min \{k | \exists s_{i_1}, \dots, s_{i_k} \in S_n: \pi = s_{i_1} \cdots s_{i_k}\}.$$

也就是说, 置换的长度定义为需要生成元的最少数量。单位元的长度我们定为 0。

我们将证明如下重要性质:

定理 3.4. 对于 $\pi \in S_n$, $l(\pi) = \text{inv}(\pi)$.

证明. 我们先证明 $\text{inv}(\pi) \leq l(\pi)$ 。事实上, 如果 $\pi = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ 是 π 的最短展示, 则有对任意 s_i ,

$$\text{inv}(\pi s_i) = \text{inv}(\pi) \pm 1$$

于是我们有

$$\text{inv}(\pi) \leq \text{inv}(s_{i_1} \cdots s_{i_k}) + 1 \leq \dots \leq k = l(\pi).$$

反方向的证明我们使用归纳法反证。假设对任意 $\pi \in S_n$ 满足 $t = \text{inv}(\pi) > 0$ 。假设 $i < j$ 为最小的指标, 满足 $\pi(i) > \pi(j)$ 。则显然不存在 $i < k < j$ 使得 $\pi(i) < \pi(k) < \pi(j)$ 成立。也就是说如果 $\pi(i) > \pi(i+1)$, 则有

$$\text{inv}(\pi s_i) = \text{inv}(\pi) - 1 = t - 1$$

且

$$l(\pi s_i) = \text{inv}(\pi s_i) = t - 1$$

于是 $\pi = s_{i_1} \cdots s_{i_{t-1}} s_i$, $l(\pi) \leq t = \text{inv}(\pi)$ 。 □

我们还可以因此得到很多性质, 比如容易知道 $l(\pi^{-1}) = \text{inv}(\pi^{-1}) = \text{inv}(\pi) = l(\pi)$ 。根据这一定理, 我们可以得到下降数 (集) 和主指标的另外一个等价定义。

定义 3.5. (下降集)

$$\{i | \pi(i) > \pi(i+1)\} := \text{Des}(\pi) = \{i | l(\pi s_i) < l(\pi)\}.$$

类似地，我们还可以定义左下降集和右下降集（它们也可以看作是从左往右和从右往左看的下降集）。注意此处的集合元素是生成元

$$\begin{aligned} \text{RDes}(\pi) &:= \{s \in S | l(\pi s) < l(\pi)\} \\ \text{LDes}(\pi) &:= \{s \in S | l(s\pi) < l(\pi)\} \end{aligned}$$

因为 $l(\pi^{-1}) = l(\pi)$, 我们可以得到左右下降集的关系

$$\text{命题 3.6.} \quad \text{LDes}(\pi) = \text{RDes}(\pi^{-1})$$

证明. $\pi = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$, 则 $\pi^{-1} = s_{i_k}^{-1} \cdots s_{i_1}^{-1} = s_{i_k} \cdots s_{i_1}$. □

那么左右下降集等势吗?

$$\text{注意 3.7.} \quad |\text{RDes}(\pi)| \neq |\text{LDes}(\pi)|.$$

一个简单的例子：考虑 $3142 \in S_4$ 因为它的右下降集与 2413 的左下降集相同。前者右下降集的势与下降集相同。后者的右下降集的势为下降集的势，1，它们并不相等。

或者简单地看从右往左和从左往右下降是不一样的。

3.2 Coxeter-Dynkin图

3.2.1 反射群的Coxeter图

Coxeter 群的每一个生成元都可以看成一面镜子，而它们的夹角是 $180^\circ/m_{ij}$. 比如对称群的生成元之间的夹角是 60度，平面中任何一个像经过三次交替的反射都能得到原像。本小节关于反射群和Coxeter图的关系的解释摘录于知乎陈浩的描述 [15]。

对于 **Coxeter 图**（或称为Coxeter-Dynkin图，邓肯图大于等于4的分支是有方向的），每个顶点代表一面镜子，对于整数 k ，如果两边镜子之间呈 $180/k$ 度，那么交替反射 k 次之后与原像重合。

夹角为90度的镜子在群论意义上，这两个反射是可以分开考虑的，因此画 Coxeter 图的时候，不画标签为 2 的边。

如果两面镜子的夹角为 60 度，两面镜子交替反射三次之后与原像重合。这种情况在反射群的研究中太过常见，因此画 Coxeter 图的时候省去标签 3，只画出边。

对于其他情况的夹角，如果反射 k 次，我们就在连线加上标签 k 。

容易得之，这两个例子 ($\bullet-4-\bullet$ 和 $\bullet-\bullet-\bullet$) 分别有 8 个和 6 个像。前者表示的反射图像如下：

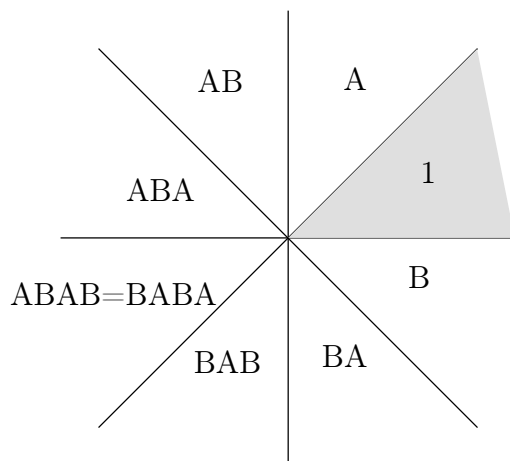


图 3.1. $\bullet-4-\bullet$ 的镜子

如果一组镜子只产生有限个像，我们称他们反射的组合之为**有限反射群**。1935 年，H. S. M. Coxeter（可能是最伟大的加拿大数学家）将所有的有限反射群分类，证明只有以下这些情况（其中大多是高维的镜子）

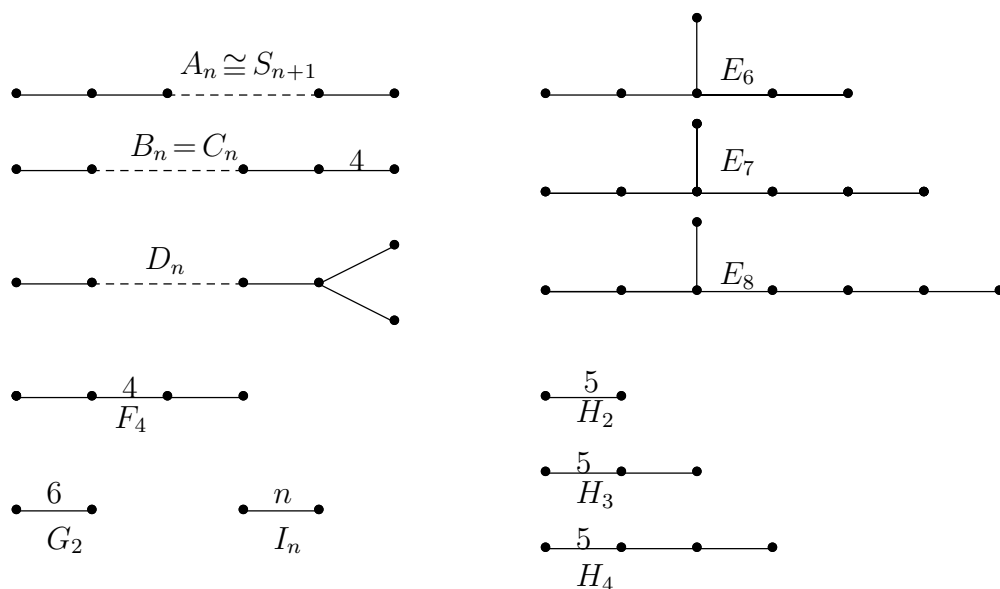


图 3.2. 有限反射群的分类

而接下来的这两个例子 ($\bullet-4-\bullet-4-\bullet$ 和 $\bullet-\bullet-\bullet$) 其实分别就是制作万花筒常用的组合。它们的三面镜子产生的像都能覆盖整个平面。更多有意思的万花筒结构可参见 Wikipedia 的 [Coxeter Group](#) 词条。

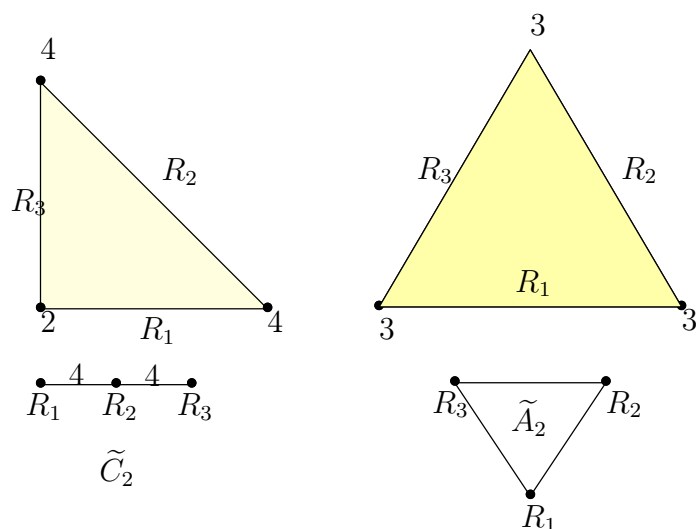


图 3.3. o-4-o-4-o 和 o-o-o 的镜子

他们可以产生无穷多的像。对于这样的一组镜子，我们称其反射的组合为**仿射反射群**。我不确定是 Coxeter 1935 还是 Kac 1994 对仿射反射群分门别类，证明只有以下这些情况（其中大多是高维的镜子）

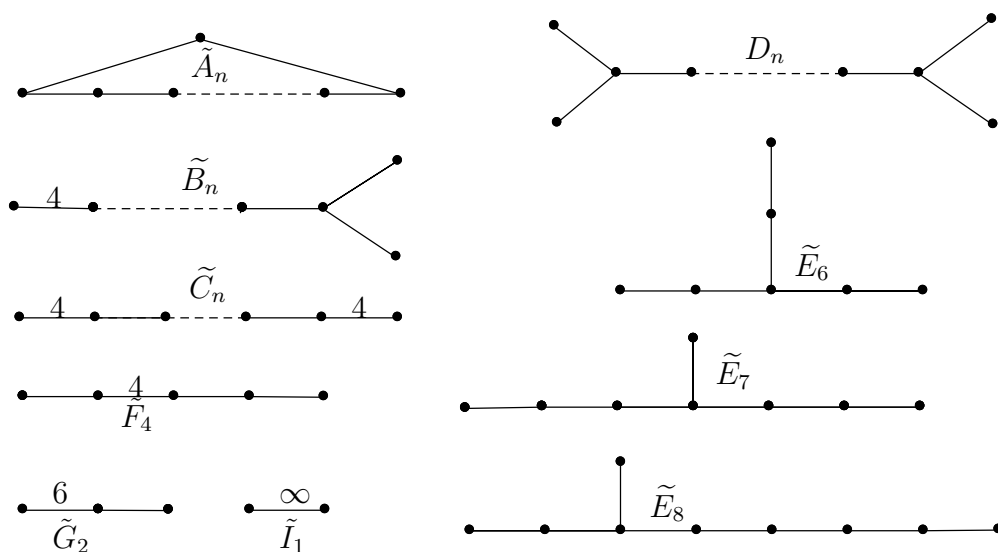


图 3.4. 仿射反射群的分类

Coxeter 的一大贡献，是将反射群抽象化。抽象之后的 Coxeter 群不一定能用欧几里德空间的镜子反射来表示了。不过人们发现，许多 Coxeter 群可以用双曲空间的镜子反射来表示。维基百科数学话题的图标就是一个双曲平面的反射群。

这个方向的一大推动者是俄罗斯大神 E. B. Vinberg。在 Vinberg 的带领下，人们开始对双曲空间反射群分门别类，但是目前为止进展都不大。

对我个人来说，最激动人心的进展来自 Vinberg 本人。双曲空间中，两面镜子不只有相交和平行两个状态。不相交的两个镜子也可能在双曲空间的边缘相遇，称为平行。如果在边缘都不相遇，这样的两面镜子称为超平行。因此几面镜子围成的区域，可能并不是「紧致」的，甚至有可能有无穷大的体积。1984 年 Vinberg 证明，如果要求镜子围成的区域是「紧致」的，那么这组镜子至多存在于 30 维双曲空间。两年后，俄罗斯数学家 Prokhorov 证明，如果要求镜子围成的区域体积有限，那么这组镜子至多存在于 296 维双曲空间。至少这些反射群的维度是有限的，这是个好消息。

而最让人扫兴的进展出现在 2006 年，D. Allcock 证明，在维度小于 6 的双曲空间中，有无穷多的「紧致」双曲反射群；在维度小于 19 的双曲空间中，有无穷多的「有限体积」双曲反射群。因此，列出所有双曲反射群是一项不可能的任务。是否可能做分门别类呢？

反射群在晶体和多面体的研究中都有重要的应用。相关的经典教材是：[Reflection Groups and Coxeter Groups \(Cambridge Studies in Advanced Mathematics\)](#) (豆瓣)。

3.2.2 Coxeter 矩阵与 Coxeter 图的关系

我们也可以通过 Coxeter 矩阵来直接画出 Coxeter 图，反之亦然。比如先考虑群 B_3 。它的 Coxeter 图为 $\bullet-4-\bullet-\bullet$ 。对应的 Coxeter 矩阵是 3×3 ，对角线为 1。第一个点和第二个点的标签是 4，因此 $m_{12} = m_{21} = 4$ ；第二个点和第三个点的标签是 3（默认），因此 $m_{23} = m_{32} = 3$ ；而第一个点和第三个点是断开的，因此标签是 2， $m_{13} = m_{31} = 2$ 。所以 B_3 的 Coxeter 矩阵为

$$m = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3 0-Hecke 么半群

我们考虑关系

$$(s_i - 1)(s_i + q) = 0$$

当 $q = 1$ 时，则为 $s_i^2 = 1$ ，即 S_n 的情形；

当 $q = 0$ 时， $s_i^2 = s_i$ ，这种情况被命名为 **0-Hecke 么半群**（以 Iwahori Hecke 命名）。0-Hecke 么半群其实就是 Coxeter 么半群 (Monoid)，因为它们和一个 Coxeter 群的 0-Hecke 代数 ($q = 0$ 时) 相关。一个完整的 q -Hecke 么半群 H_q 的展示定义如下：

$$H_q = \left\langle s_1, s_2, \dots, s_{n-1} \left| \begin{array}{l} (s_i - 1)(s_i + q) = 0 \\ s_i s_j = s_j s_i \quad (|i - j| > 1) \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n - 2) \end{array} \right. \right\rangle.$$

4 标准杨表

本节主要是以 ADIN 课程的第4-6课为基础, 参考他讲义中的 Lec 6-9 以及 ADIN 和 ROICHMAN 的一篇关于标准样表的综述文章 [3]。

4.1 标准杨表简介

标准杨表的概念来自于这样一个有趣的问题, 我们把标有1到 n 数字的球依次放进一个(角垂直) V 形槽中; 比如如下这个结果

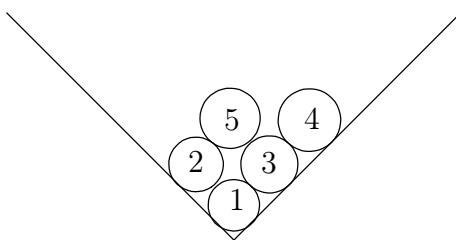


图 4.1. 依次放小球

问题 1. 对于给定数字 n , 一共有多少种摆放可能? 对于同样形状的摆放, 一共有多少种可能?

定理 4.1. (Frobenius, Schur) n 个小球的摆放的可能数和 S_n 中的对合置换数量一样。

我们将在之后详细论述这个结论的组合形式, 也可以参见 [3] 的第四节。另外我们还有一个自然的问题:

问题 2. 每一种摆放是如何对应到 S_n 的特定置换的?

这一问题的解决就是著名的 RSK 算法, 以ROBINSON, SCHENSTED和KNUTH这三位数学家命名。之后我们也会展开这一结果。

对于问题 1 中的后一个子问题, STANLEY 给出一个很有意思的结果。

定理 4.2. $\binom{n}{2}$ 个小球的 $n-1$ 层摆放可能数与 S_n 的弱序最长链的个数相等。

更多结果可以参见[3]的第十一节。

此处的弱序(left weak order)指的是

$$\pi \leq \sigma \iff \text{inv}(\pi) + \text{inv}(\sigma\pi^{-1}) = \text{inv}(\sigma).$$

上述小球的摆放形式我们称之为标准杨表(standard Young tableau)。在我们进一步准确定义标准杨表之前, 我们需要定义图 (diagram)。

定义 4.3. (图表, 图) 一个图表 D 是一个二维整晶格 \mathbb{Z}^2 的有限子集。一个图表的点 $c=(i, j) \in D$ 又称为在表 D 中第 i 行第 j 列的单元格。我们将其写作 $\text{row}(c)=i$ 和 $\text{col}(c)=j$ 。每个单元格的大小通常是一个 1×1 的方格，中心位于晶格的点上。

直观地，我们通常有多种方式画图表，有英式、俄式和法式。它们分别是从左上到右下的英式，从下到上和左下到右上的法式，以及我们之前放球的方式一样的俄式。英式和法式如下图所示。



图 4.2. 图表的形式

我们常常会使用英式，这种形式 i 从上到下增大， j 从左到右增大。

由上述定义，我们可以定义一个自然的继承于 \mathbb{Z}^2 的偏序：

$$(i, j) \leq_D (i', j') \iff i \leq i' \wedge j \leq j'.$$

下面我们可以给出标准杨表的定义：

定义 4.4. (标准杨表) 令 $n=|D|$ ，考虑集合 $[n]:=\{1, 2, \dots, n\}$ 和它们的常规线性序。一个给定 D 形状的标准杨表是保序的一个双射 $T: D \rightarrow [n]$ ：

$$c \neq c' \Rightarrow T(c) \neq T(c') \wedge c \leq_D c' \implies T(c) \leq T(c').$$

我们把这样的标准杨表写为 $T = \text{SYT}(D)$ ，而图表 $D = \text{sh}(Y)$ 。

从几何上讲，一个标准杨表是填满了 1 到 n 的所有数字的 n 个位置图表，满足每个数字只出现一次，且在每行和每列数字都是递增的。我们记所有的 D 形状的标准杨表个数为

$$f^D := |\text{SYT}(D)|.$$

计算特定 D 的标准杨表个数就是要回答我们先前的问题 1.

另外图表的路径联通性 (path connected) 和沿线凸性 (line convex) 也可以严格定义，但在此处不再列出，可以参考 [3] 的 2.2 小节。不过它们的定义可以简单地凭直觉获得。

4.1.1 普通、斜角和移位的形状

最普遍容易的标准杨表研究的对象是拆分的标准杨表。我们已经知道一个**拆分**是一个正整数的弱递减序列 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ 。我们称 λ 的大小是 $n = |\lambda| := \sum_{i=1}^t \lambda_i$ ，长度是 $\ell(\lambda) := t$ ，并写作 $\lambda \vdash n$ 。空拆分 $\lambda = ()$ 的大小和长度都是0。

我们先介绍如下三种最常见的图表：

定义 4.5. (普通图, Ferrers图, 杨图) 令 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ 是一个分拆。给定形状 λ 的普通 (*Ordinary, Young, Ferrers*) 图是集合

$$D = [\lambda] := \{(i, j) | 1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

我们称 $[\lambda]$ 是一个高度为 $\ell(\lambda)=t$ 的图。

我们称两个杨图是**共轭的**当且仅当它们的行列互换相等，也就是沿着对角线反射得到。共轭的杨图拥有相同的标准杨表个数。

定义 4.6. (斜角图) 令 μ, λ 为两个拆分, 且 $[u] \subseteq [\lambda]$, 则斜角形图 (*skew diagram*) λ/μ 是它们两个普通图的差:

$$D = [\lambda / \mu] := [\lambda] \setminus [\mu] = \{(i, j) \in [\lambda] : \mu_i + 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

斜角图是沿线凸的，但是不一定是路径联通的。

注意 4.7. 一个图表 D 是斜角的当且仅当它是序凸的(order-convex), 也就是说

$$c, c'' \in D, c' \in \mathbb{Z}^2, c \leq c' \leq c'' \Rightarrow c' \in D.$$

其中 \leq 是 \mathbb{Z}^2 中的自然偏序。

定义 4.8. (移位图) 一个分拆 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ ($t \geq 0$) 是严格的当且仅当 λ_i 是严格递减的。一个 λ 形状的移位图 (*shifted diagram*) 是如下集合

$$D = [\lambda^*] := \{(i, j) | 1 \leq i \leq t, i \leq j \leq \lambda_i + i - 1\}.$$

这相当于是把杨图的每一行（第 i 行）往右移动 $i-1$ 位。我们常常会使用 g^λ 来代替 $f^D = f^{\lambda^*}$ 。注意 $\lambda_i + i - 1$ 是弱递减的。

比如 $\lambda = (4, 3, 1)$, 则

$$[\lambda^*] = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}$$

注记 4.9. 一个移位图永远是线凸且路径联通的。

4.1.2 图表的标准杨表解释

这一小节我们解释杨图的标准杨表， 这里有三种主要解释：

第一种解释是把杨表看作一个生长过程， 即杨格。一个杨图的标准杨表可以表述为一个杨图生长过程， 从空拆分对应的杨图开始， 到拆分 λ 结束， 它的一个最长杨图生长链就对应一个标准杨表。也就是说 f^λ 就是这样最长生长链的个数。而 $f^{\lambda/\mu}$ 就是从 μ 到 λ 的最长链个数。而斜角图的标准杨表可以类似地表示为一个斜角杨格的最长链， 这一偏序集是严格的。

这种解释也可以几何化表示， 就是从 $(0,0,\dots,0)$ 这个点沿着晶格（只能往上和往右）到达 $(\lambda_1, \dots, \lambda_t)$ 这个点。

注记 4.10. 其实这一种解释也可以描绘为“砌墙过程”（使用法式表示法）， 杨表的标签就是砌墙的过程和顺序。

第二种解释是利用 Ballot 序列。然后我们可以定义一个标准杨表和 Ballot 序列的双射。 Ballot 序列可以看作是一个多个候选人的投票过程的序列， 且任何时候 1（获胜者）的个数多余2的个数多余3的个数等等（候选人编号按照结果得票率排序得到）。比如， $(1,1,2,3,2,1,4,2,3)$ 表示 4 个候选人， 9个选举人的投票序列（Ballot 序列）。

这个双射定义为： $\phi: \text{SYT}(\lambda) \rightarrow \text{BS}(\lambda)$, $\phi(T)_i := \text{row}(T^{-1}(i))$ ($1 \leq i \leq n$). 也就是说 Ballot 序列的第 i 个数是 i 这个数在杨表的行数。因此标准杨表个数也和 Ballot 序列数是相等的。

第三种解释是有序多面体(order polytope)。我们可以通过图表的偏序定义序多面体

$$P(D) := \{f: D \rightarrow [0, 1] \mid c \leq_D c' \implies f(c) \leq f(c') (\forall c, c' \in D)\}.$$

注意到有序多面体是一个单位立体 $[0, 1]^D$ 的闭凸子集。实际上， 任何一个 $P(D)$ 的元素不但是函数集合， 也能够表达为一个线性规划围成的区域集合。比如当 $n = 2$ 时， 杨图为左右两个格子， 则满足 $f(1, 1) \leq f(1, 2)$ 的所有函数集合的图像在 $[0, 1]$ 中叠加的效果就是一个以 $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ 围成的三角形区域。

一个重要的观察是任意一个单形 $\{f: D \rightarrow [0, 1] \mid f(c_1) \leq \dots \leq f(c_n)\}$ 的体积是 $\frac{1}{n!}$, 任意两个单形的交点都在超平面上， 因此体积为零， 所以我们有如下结论：

$$\text{vol } P(D) = \frac{f^D}{|D|!} = \frac{f^D}{n!}.$$

4.2 RSK 算法

RSK 算法全称Robinson-Schensted-Knuth算法，这个算法通过构造一个双射证明了

$$\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!.$$

这一部分内容可以在 Stanley 的 Enumerative Combinatorics [6] 7.11&7.13 以及 Sagan 的教材 [1] 中的 3.1-3.6 找到。下面简化的 RSK 算法归功于一个优质知乎问答 [16]。

在引入证明的算法之前，我们定义**近似标准杨表** (Near Young Tableau)。近似杨表和标准杨表的唯一区别是填入的数字不一定是 1 到 n ，可以是任意 n 个不同的数字，填法和标准杨表一样。

我们用 P 来表示一个近似杨表，其中 P_{ij} 表示 P 的第 i 行第 j 列。**RSK**算法的核心操作是一种插入操作，称作**行插入** (row insertion)。

定义 4.11. (行插入) 定义行插入 $P \leftarrow k$ 表示将数 k 插入近似杨表。流程如下：

1. 寻找最小的 r 使得 $P_{1r} > k$
2. 如果不存在这样的 r (第一行都比 k 小)，就把 k 插入到第一行末尾，结束。
3. 如果找得到 r ，则用 k 替换 P_{1r} 。
4. 设替换出来的 P_{1r} 为 k' ，考察第二行重复 1-3 的类似操作。
5. 重复循环上述操作，直到某个元素加到最后一行末尾或是新增一行。

下面是一个 $P \leftarrow 8$ 的例子：

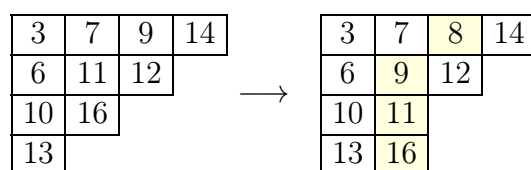


图 4.3. $P \leftarrow 8$

接下来，我们便可以描述RSK算法了。令 $\pi = a_1 \cdots a_n \in S_n$ (一行形式)，RSK算法是要构造一个近似杨表对的序列 $(P_0, Q_0), (P_1, Q_1), \dots, (P_n, Q_n)$ ，其中 P_i, Q_i 是形式一致的近似杨表，都包含 i 个方格。那么RSK的具体流程如下：

算法 (RSK, Robinson,1938, Schensted,1961 and Knuth,1970)

1. 定义 $(P_0, Q_0) = (\emptyset, \emptyset)$

2. 如果 (P_{i-1}, Q_{i-1}) 已经定义, 那么 P_i 就是将 a_i 插入到 P_{i-1} , 即 $P_i = (P_{i-1} \leftarrow a_i)$
3. 我们通过把 i 插入 Q_{i-1} 使之扩展的 Q_i 和 P_i 保持相同形状
4. 最后令 $(P, Q) = (P_n, Q_n)$.

我们称 P 为 π 的插入表(insertion tableau), Q 为 π 的记录表(recording tableau)。

举个例子: $\pi = 423615 \in S_6$,

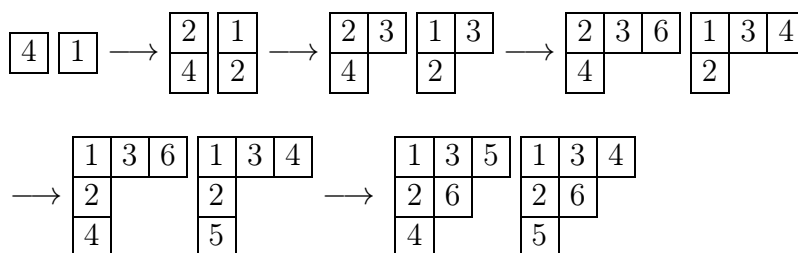


图 4.4. 423615 的RSK算法过程

需要注意的是第三步记录表的操作不是行插入, 而是在 P 表新增对应位置填上指标数即可。

定理 4.12. *RSK* 算法定义了一个所有能得到的 (P, Q) 构成的集合 $AllPQ$ 与 S_n 的双射 $AllPQ \leftrightarrow S_n$ 。

证明. 由RSK算法的流程, 直接可以得到 $S_n \rightarrow AllPQ$.

至于反方向, 核心的证明思路是逆向RSK的过程。我们考虑 $(P, Q) \in AllPQ$, 我们令 Q 中的 n 所在位置对应的 P 中的值 k , 把 k 所在行的上一行比 k 大的最小元素弹出, 不妨假设弹出的值为 k' , 继续将 k' 向上插入, 直到从第一行弹出一个值, 这时候弹出的值便是RSK最后一次插入的值, 也同样是 π 中最后一个值。重复以上操作 (下一个 $n-1$ 位置对应的 P 中的 k), 我们便可以复原出 π 。□

比如上述423615的例子中, $k_1=6$, 剔除了第一行的5, 因此置换 π 的最后一个数字是5。 $k_2=4$, 先踢出第二行的2, 2再踢出第一行的1, 因此倒数第二个数字是1。由此可以进行下去, 得到 π 的全部数字。

因为 P, Q 的形状 $sh(P) = sh(Q)$, 所以我们有

定理 4.13. (RSK)

$$\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!$$

这是由于形状 λ 的 P, Q 总数都是 f^λ ，那么它们的对数就是 $(f^\lambda)^2$ ，而这些总和正是 $|S_n| = n!$ 。

注记 4.14. 对于插入表和记录表，如果 $\pi \leftrightarrow (P, Q)$ 我们可以得到 $\pi^{-1} \leftrightarrow (Q, P)$ 。因此，如果 π 是对合，则有 $P = Q$ ，于是 S_n 的对合和任意大小为 n 的标准样表一一对应。

由上述注记和RSK 算法，我们可以得到另外一个重要推论（亦即定理 4.1）：

推论 4.15. 所有大小为 n 的标准杨表个数等于 S_n 的全部对合个数。所以

$$\sum_{\lambda \vdash n} f^\lambda = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (2k-1)!!,$$

其中 $(2k-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)$ 。

如果 λ 是严格划分的，也就是说划分是严格递减的，Schur 在一百多年前使用表示论证明了如下结果。Sagan 之后给出了组合证明。

定理 4.16.

$$\sum_{\lambda \vdash n \text{ strict}} 2^{n-\ell(\lambda)} (g^\lambda)^2 = n!.$$

其中 $\ell(\lambda)$ 是 λ 的长度，即分拆部分的数量。 g^λ 是其移位形的标准杨表数目。

4.2.1 RSK 算法的一个应用

我们在这里提一提这一定理的一个应用，解决**最长上升子序列**（Longest Increasing Subsequence）问题。最长上升子序列是指一个序列的最长严格递增的子序列。比如序列 42315 的最长上升子序列为 235，我们记它的长度为 $\text{LIS}(42315) = 3$ 。

我们可以通过二分法得到一个计算寻找 LIS 的方法的复杂度，即 $O(n \log n)$ 。如果考虑最长上升子序列的期望，我们知道它的定义为

$$\mathbb{E}_n = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} \text{LIS}(\pi).$$

通过上述结果，使用暴力解决的话，我们求期望的复杂度是 $O(n! \cdot n \log n)$ 。

我们还可以使用动态规划得到一个复杂度为 $O(2^n \cdot n^2)$ 的方法。下面我们可以使用 RSK 算法来得到一个复杂度更小的方法。

首先我们需要引用一个整数划分的渐近结果：

引理 4.17. (Hardy, Ramanujan) $p(n)$ 表示 n 的划分的个数，那么

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}n} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right).$$

这一定理能帮我们分析复杂度。

实际上，我们看到RSK算法和最长上升子序列的二分做法有着本质的联系。都是找到比当前元素大的最小的元素，然后交换。所以我们可以得到如下定理：

定理 4.18. (Theorem 3.3.2 [1]) 对于置换 $\pi \in S_n$ ，其最长上升子序列的长度 $\text{LIS}(\pi)$ 等于 π 的插入表 P 的第一行的长度（即 $\text{sh}(\pi)$ 的长度）。

有了这个认识后，统计最长上升子序列的和的问题就可以转换为，求解整数划分的问题

$$\sum_{\pi \in S_n} \text{LIS}(\pi) = \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 \cdot |\lambda_1|$$

我们知道 n 的划分个数是 $p(n)$ ，于是我们得到了一个更快的最长上升子序列的和的统计算法。可以在 $O(n \log n)$ 的时间内，统计出 n 的排列中，最长上升子序列的期望。

上述例子是知乎用户回答的贡献，参见[16]。

Greene 给出推广了的 $\text{LIS}(\pi)$ 的长度的公式。

定义 4.19. (k-递增) 令 π 为一个序列，一个 π 的子序列 σ 称为 k -递增的当且仅当， σ 作为集合可以写为

$$\sigma = \sigma_1 \uplus \sigma_2 \uplus \cdots \uplus \sigma_k,$$

其中每个 σ_i 都是递增子序列。如果 σ_i 都是递减的，我们称 σ 是 k -递减的。

当 $k=1$ 时，这是常规的递增递减子序列。

令 i_k 为 π 最长的 k -递增子序列的长度，而 d_k 为 π 最长的 k -递减的子序列的长度。则我们有如下 Greene 定理：

定理 4.20. (Greene, Theorem 3.5.3, [1]) 令 $\text{sh}(P(\pi)) = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ 以及共轭 $(\lambda'_1, \dots, \lambda'_m)$ ，则对任意 k ：

$$\begin{aligned} i_k(\pi) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k \\ d_k(\pi) &= \lambda'_1 + \lambda'_2 + \cdots + \lambda'_k \end{aligned}$$

注记 4.21. 定理 4.18 的对偶结果是 LDS 的长度 $\text{LDS}(\pi)$ 和 $\text{sh}(\pi)$ 的高度是相等的。

由此，我们可以得到如下推论：

推论 4.22. 对任意正整数 k , 所有高度小于 k 的 SYT 个数等于 S_n 中不含 $[k, k-1, \dots, 1]$ 的对合个数。

也就是说, 我们有

$$\pi \leftrightarrow (P, Q) \iff \pi^{-1} \leftrightarrow (Q, P). \quad (4.1)$$

置换逆的定义是调转循环形式, 即 $\pi = (123), \pi^{-1} = (321)$ 。类似的, **反向置换** (reversal of π) 定义为调转单行形式, 即 $\pi = 123 = \epsilon, \pi^r = 321 = (13)$ 。对于反向置换的RS 算法对应, 我们有

$$\pi \leftrightarrow (P, Q) \iff \pi^r \leftrightarrow (P^t, \text{ev}(Q^t)), \quad (4.2)$$

其中上标 t 表示转置, 而 ev 是搬空表 (evacuation tableau, 参见[1] p. 122)。

4.2.2 半标准杨表和RSK算法

我们也能定义**半标准杨表** (semi-standard Young tableau) 以及它的RSK算法。半标准杨表是可重复的 1到 n 插入杨图, 但是行是弱递增的, 列依然是严格递增的。下面是一个半标准杨表的例子。

1	1	2	5	6
2	3	6		
6				

我们同样能定义半标准杨表的行插入。

半标准杨表对应的“置换”我们称之为**广义置换** (generalized permutation)。广义置换是广义对称群中的元素。定义一个广义置换的形式是以“第一行为主”的逐行递增的。比如

$$\omega_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

每个广义置换对应一个**广义置换矩阵**, i 行 j 列的元素表示从 i 到 j 的置换个数, 比如上述例子的广义置换矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

这一定义约束到一般的置换也是可以的, 比如 $\pi = (123)$, 则

$$A = A_\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \pi$$

对于置换的广义置换矩阵，它们都是方阵，且每行每列仅有一个1。

注记 4.23. 注意此处的广义置换并不仅仅是第一节提出的 B_n ，它的重复系数最多可以是 $C_m \wr S_n$ 中的 m 。

实际上，通过RSK算法，我们可以得到任意广义置换是和半标准杨表也是一一对应的。这是 Knuth 推广的结果（参见[1]的4.8节）。

定理 4.24. (Knuth 70) 存在一个广义置换和相同形状的半标准杨表对的双射，

$$\pi \xleftrightarrow{\text{RSK}} (T, U)$$

其中广义矩阵的下上两行的内容 $\text{cont}(\tilde{\pi}) = \text{cont}(T), \text{cont}(\hat{\pi}) = \text{cont}(U)$ 。

例 4.25. 考虑广义矩阵 $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 。则 $\text{cont}(\hat{\pi}) = (3, 2, 1), \text{cont}(\tilde{\pi}) = (2, 2, 2)$ 。于是 RSK 算法如下(按照 RS 依次写入第二行)：

$$\begin{array}{cccccc} 2 & , & 2 & 3 & , & 2 & 3 & 3 & , & 1 & 3 & 3 & , & 1 & 2 & 3 & , & \begin{matrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & \\ 3 & & \end{matrix} = T, \\ \\ 1 & , & 1 & 1 & , & 1 & 1 & 1 & , & 1 & 1 & 1 & , & 1 & 1 & 1 & , & \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & \\ 3 & & \end{matrix} = U. \end{array}$$

我们也已经知道每个广义置换 π 和一个广义置换矩阵 M 对应。因此也表明

$$M \xleftrightarrow{\text{RSK}} (T, U)$$

其中 $\text{cont}(T)$ 和 $\text{cont}(U)$ 给出 M 的向量的列和和行和。

定理 4.26. 如果 $M \in \text{Mat}$ 且 $M \xleftrightarrow{\text{RSK}} (T, U)$ ，则

$$M^t \xleftrightarrow{\text{RSK}} (U, T).$$

4.2.3 淘气游戏

对任意一个形状为 λ/μ 的偏序斜角表 P ，我们定义从一个内角点（inner corner） c 开始前进滑动（forward slide），是一个向右或者向下的替换，每次替换选择一个相对较小的，最终到达斜角表的右下角停止。即从被删除的杨图的内角点变换到大杨图的内角点。得到的结果我们用 $j^c(P)$ 表示。

类似地，定义退后滑动 (backward slide)，是一个向上或者向左的替换，每次替换选择相对较大的位置，最终到达斜角表的左上角小杨表的外角点。得到的结果我们用 $j_c(P)$ 表示。显然上述两者是可逆的。

如果原来的表是标准的，则有如果 $j^c(P) = d$ 则 $j_d j^c(P) = P$. 类似的， $j^c j_d(P) = P$. Sagan 书中的结论是不准确的。详细的例子可以参见 Sagan [1] 的第114 页。

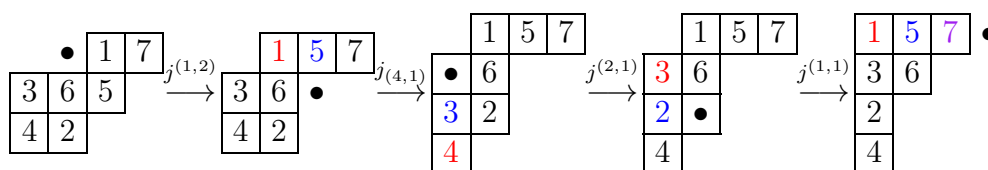
对任意偏序斜角表 P ，我们的淘气游戏(jeu de taquin)是选择任意一个滑动序列，使得 P 变成正常的形状（杨图），然后开始使用这个序列，得到的结果记为 $j(P)$.

下面我们用淘气游戏来构造杨表的 P 表。

例 4.27. 考虑 $\pi = 4236517$ ，以及一个随机的斜角杨表 P 如下。

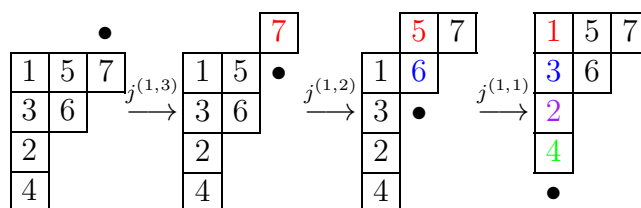
		1	7
3	6	5	
4	2		

我们可以作它的淘气游戏(随意的前进或者退后滑动)：

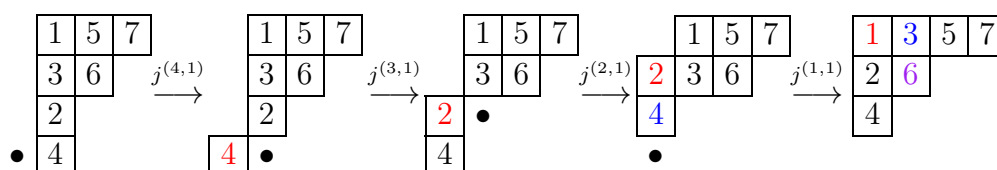


注意到最后得到的杨图不是标准杨表，这是不是表明淘气游戏仅仅只是“淘气”而没有效果呢。这是一个杨图 $(3, 2, 1, 1)$ ，但是也是一个斜角图 $(3, 3, 2, 1, 1) / (3)!!!$

因此我们可以在第一行前添加一行空白，继续我们的淘气游戏。

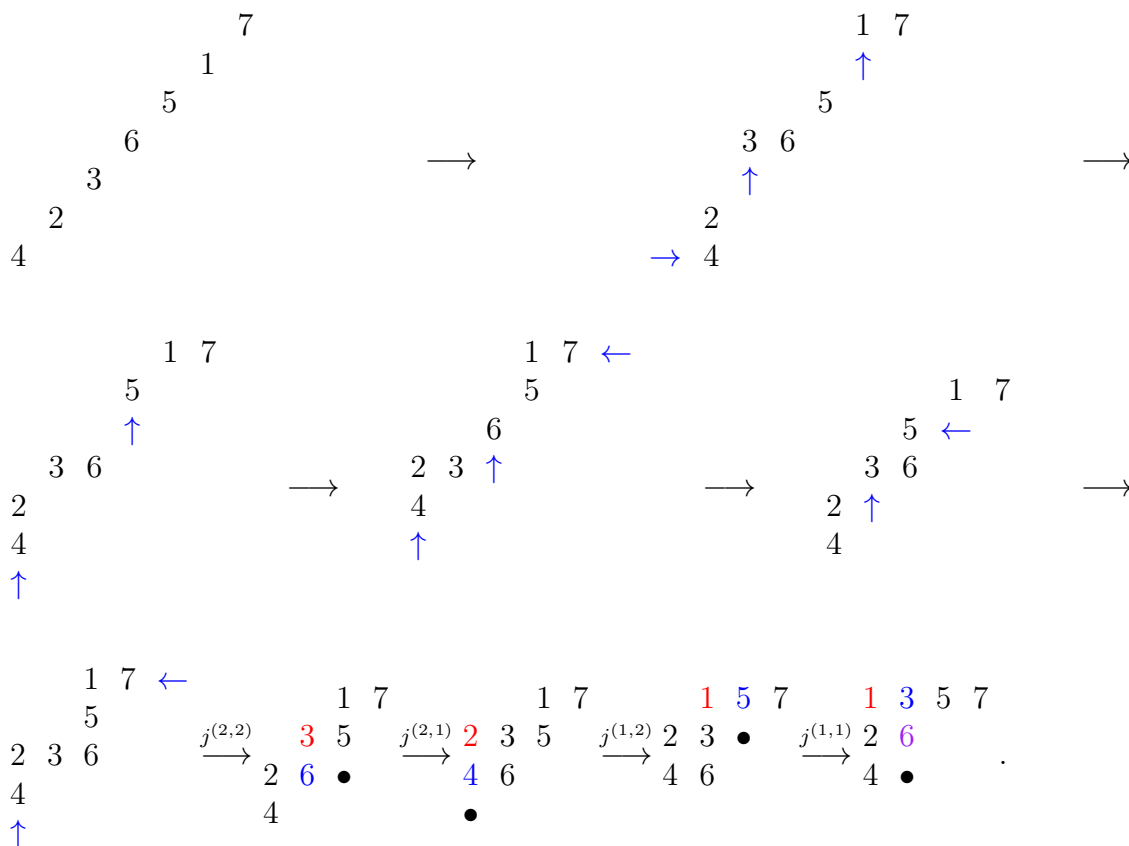


一切似乎又回到了原点。不要气馁换个方式继续来。如果是考虑加第一列呢？也就是说把杨图看成斜角图 $(4, 3, 2, 2) / (1, 1, 1, 1)!!$



最后一个标准杨表就是 RS 算法的插入表 P !

事实上， 为了更有效地求出一个置换的插入表， 我们通常会使用一个斜对角表 (从左下角开始到右上角)的淘气游戏。比如上述例子 $\pi = 4236517$ 。我们可以写为



由此可以得到的最终的一个标准杨表即是插入表。

4.3 各种形状的标准杨表数量公式

4.3.1 勾形

勾形 (hook shape) 的标准杨表是一个仅有一行一列的形状。也就是在左上角分成垂直的两条。这是最简单的标准形状。

命题 4.28. 对任意 $n \geq 1$ 和 $0 \leq k \leq n-1$, 则有

$$f^{(n-k, 1^k)} = \binom{n-1}{k}.$$

证明很简单， 数字1只能放在角落， SYT唯一决定于第一列的 k 个元素， 一旦确定这 k 个元素， 它们的位置也都确认了。

注意到， 在勾形 $(n+1-k, 1^k)$ 中， 容易知道 $n+1$ 这个数字必须在第一行的最后一个数， 或者最后一列， 因此

$$f^{(n-k+1, 1^k)} = f^{(n-k, 1^k)} + f^{(n-k+1, 1^{k-1})}.$$

这等价于帕斯卡等式 $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ ($1 \leq k \leq n-1$). 于是我们自然地有

命题 4.29. 所有大小为 n 的勾形的 SYT 的个数是 2^{n-1} .

这一命题也能通过找双射来证明, 大小为 n 的 SYT 和 $\{1, \dots, n\}$ 的含 1 子集一一对应, 每个对应的数字是放在第一行的数。

4.3.2 两行形

两行形 (two-rowed shape) 是考虑仅仅有两行的普通图 (杨图) 的标准杨表。

命题 4.30. 对任意 $n \geq 0$, $0 \leq k \leq n/2$

$$f^{(n-k, k)} = \binom{n}{k} - \binom{n}{k-1},$$

约定 $\binom{n}{-1} = 0$ 。特别地,

$$f^{(m, m)} = f^{(m, m-1)} = C_m = \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m},$$

这恰好是 m -次 *Catalan* 数。

这一命题可以通过数学归纳法证明。

推论 4.31. 所有不超过两行的大小为 n 的杨图的标准杨表个数为 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 。

证明. 根据命题 4.30, 我们可以得到

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} f^{(n-k, k)} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} \right) = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}. \quad \square$$

至于三行形, 根据 RSK 和两行形的结果, 我们有如下结论

命题 4.32. 不超过三行的大小为 n 的所有 SYT 的个数等于

$$M_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} C_k$$

其中 C_k 是 k 阶 *Catalan* 数, 而 M_n 被称为 *Motzkin* 数。

推论 4.33. 不超过三行的大小为 n 的所有 SYT 的个数等于 S_n 中所有不交叉的对合。

4.3.3 之字形

特定之字形的标准杨表的个数有一个有意思的公式。在此之前我们把之字形的预备向上走的位置（前一个位置）的标签定义为 $S \subseteq [n-1]$ 。那么 S 唯一确定一个之字形。比如，

$$n = 9, S = \{1, 3, 5, 6\} \longrightarrow \text{zigzag}_9(S) =$$

$$f_{\text{zigzag}_n(S)} = n! \cdot \det \left[\frac{1}{(s_{j+1} - s_i)!} \right]_{i,j=0}^k = \det \left[\binom{n - s_i}{s_{j+1} - s_i} \right]_{i,j=0}^k = \det \left[\binom{s_{j+1}}{s_{j+1} - s_i} \right]_{i,j=0}^k.$$

而所有给定大小的之字形的标准杨表的总数有下列结果给出:

证明. 我们需要找一个所有形状的之字形 SYT 和 S_n 的双射。 $f: \text{ZSYT} \rightarrow S_n$ 只需要逐行列出 SYT 的所有元素即可。反方向的映射需要一个重要观察，即之字形可以看作一条只会向上和向右走的贪吃蛇。 $f^{-1}: S_n \rightarrow \text{ZSYT}$ 的映射可以这样操作。对任意 $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n) \in S_n$, 如果 $\pi_{i+1} > \pi_i$ 则“向右走”，否则“向上走”，走完所有 π_i 即可。 \square

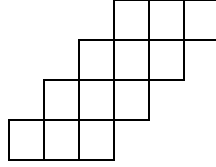
36

4.3.4 斜条形

基础的斜条形图 (basic skew strip) 是一个每行宽度为 m , 高度为 n 的楼梯形的斜角形:

$$D_{m,n} := [(n+m-1, n+m-2, \dots, m) / (n-1, n-2, \dots, 1, 0)]$$

比如一个简单的例子 $D_{3,4}$:



一个**普通的斜条形图** (general skew strip) 稍微复杂点, 它可以是任意 λ/μ 但是左下角和右上角的高度最高为 $k := \lfloor m/2 \rfloor$ 。斜条形的计算显然可以使用斜角形的各个公式, 不过它还有一切其他组合性质, 可以参见 [3] 的第 7.2 节。

4.3.5 普通形 (杨图)

现在我们考虑一般的杨图 $D = [\lambda]$ (即任意划分) 的标准杨表个数 $f^\lambda = |\text{SYT}(\lambda)|$ 。历史上, 在1900年, YOUNG 引入了普通杨图的标准杨表。他当时给出了普通的乘积公式; 随后, 1900年 FROBENIUS 给出了引入不可约指标(character)的代数公式; MacMahon 在1909年通过 Ballot 序列给出了相同的公式。1927年, YOUNG 证明了 $\deg(\chi^\lambda)$ 等于 形状为 λ 的 SYT 的个数, 即 f^λ 。

定理 4.37. (杨图的乘积公式) 对任意划分 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$, 令 $\ell_i := \lambda_i + t - i$ ($1 \leq i \leq t$)。则有

$$f^\lambda = \frac{|\lambda|!}{\prod_{i=1}^t \ell_i!} \cdot \prod_{(i,j): i < j} (\ell_i - \ell_j).$$

然而最有影响力且最明确的公式毫无疑问的属于 FRAME, ROBINSON 和 THRALL 它们的勾长公式 (Frame-Robinson-Thrall hook length formula), 这一结果发表于1954年。这个公式发现的故事很有意思。FRAME 当时想要解决另一位数学家 STAAL 工作的一个问题, 并提出了这个猜想的公式。ROBINSON 开始并不相信它的正确性, 因为形式实在是太简单了。不过在尝试了几个例子以后, 他相信了这一公式, 并和 FRAME 一起证明了这个公式。过了几天, ROBINSON 参加了一个讨论班, 报告了他和 FRAME 的这一工作。然而, 在观众席中的 THRALL 惊奇地发现他在同一天证明了这个公式。

下面我们先定义公式的主角**勾长**(hook length)。

定义 4.38. 对于任意一个杨图的方块 $c = (i, j) \in [\lambda]$, 我们称

$$H_c := [\lambda] \cap (\{(i, j)\} \cup \{(i, j') | j' > j\} \cup \{(i', j) | i' > i\})$$

为对应的勾 (hook), 且称 $h_c := |H_c| = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$ 为勾长 (hook length)。

简而言之，一个方块位置的勾长是包含当前方块以及它的正右方和正下方的所有方块数之和。

定理 4.39. (杨图的勾长公式) 对于任意的划分 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$,

$$f^\lambda = \frac{|\lambda|!}{\prod_{c \in [\lambda]} h_c}.$$

最后我们介绍一个关于特定划分的SYT标准杨表最后一个计算公式——行列式公式：

定理 4.40. (杨图的行列式公式) 对于任意的划分 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$,

$$f^\lambda = |\lambda|! \cdot \det \left[\frac{1}{(\lambda_i - i + j)!} \right]_{i,j=1}^t,$$

我们约定对于负整数 k , $\frac{1}{k!} := 0$ 。

上述的三个公式是等价的，行列式公式的证明可以推广到斜角形的行列式公式，我们将在下一小节表述。这三个公式等价的证明思路是它们都等价于乘积公式。乘积公式和勾长公式的等价的证明需要对比等式两边后，考虑去掉第一行得到；而乘机公式和行列式公式的等价需要用到下降阶乘(falling factorial)。在这里我们不再赘述具体证明过程，详细证明参见 [3] 的第17-18页。

4.3.6 斜角形

斜角形的行列式公式归功于 AITKEN, 之后又被 FEIT 发现。对于一般的斜角形，暂时没有勾长公式和乘积公式 MORALES-PAK-PANOVA [11] 在2018年利用 q -analogue 证明了NARUSE在2014年给出的斜角形的勾长公式。对于一些特殊的斜角形，也有一些乘积公式的工作，比如 DEWITT 给出了一个“楼梯减去矩形”的特殊斜角形的乘积公式。

定理 4.41. (斜角行列式公式) 对于满足 $\mu_i \leq \lambda_i (\forall i)$ 的划分 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_s)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$, 斜角形 λ/μ 的 SYT 的数目满足如下等式

$$f^{\lambda/\mu} = |\lambda/\mu|! \cdot \det \left[\frac{1}{(\lambda_i - \mu_j - i + j)!} \right]_{i,j=1}^t,$$

我们约定当 $j > s$ 时, $\mu_j := 0$; 以及对于负整数 k , $1/k! = 0$ 。

这个定理需要用数学归纳法证明，但是证明过程并不简单，具体证明参见 [3] 定理 5.6 的证明（第18-20页）。

斜角勾长公式需要引入兴奋图 (excited diagram)。对于一个斜角形 λ/μ ，一个兴奋图是一个大小为 $|\mu|$ 的杨图 $[\lambda]$ 的子集，这个子集来源于 $[\mu]$ 经过一系列的兴奋运动(excited moves)，即满足周围（右、下、右下）的三个方格都不在这个子集时，在一个 2×2 的左上角方格运动到右下角的变化。

定理 4.42. (斜角勾长公式, Naruse [11]) 对于满足 $\mu_i \leq \lambda_i (\forall i)$ 的划分 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_s)$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$, 斜角形 λ/μ 的 SYT 的数目满足如下等式

$$f^{\lambda/\mu} = |\lambda/\mu|! \cdot \sum_{D \in \mathcal{E}(\lambda/\mu)} \prod_{u \in [\lambda] \setminus D} \frac{1}{h(u)}.$$

其中 $\mathcal{E}(\lambda/\mu)$ 是全体 λ/μ 的兴奋图的集合。

当 $\mu = \emptyset$ 时，则 $D = \emptyset$ ，上述公式即是我们普通杨图的勾长公式。

因为这一公式比较难以理解，我们现在举一个例子。

例 4.43. 考虑 $\lambda = (2, 2, 2, 1)$ 和 $\mu = (1, 1)$ 则 λ 及 λ/μ 的每个方格的勾长见下图：

5	3
4	2
3	1
1	

下面我们来做法 $[\mu]$ 的兴奋运动，可以得到三个图形：

1. 不做任何的兴奋运动得到 $D_0 = \lambda/\mu$,
2. 因为(2,1)这个位置右下周围都在 λ/μ 中，我们可以把 (2,1) 移动到 (3,2)，由此得到下图中的 D_1 ;
3. 继续上面步骤，移动(2,1)以后 (1,1)右下周围也都在 λ/D_1 中，因此可以移动 (1,1) 到 (2,2)，从而得到下图中的 D_2 .

表格 4.1. λ/μ 的兴奋图，从左往右依次为 D_0, D_1, D_2 .

5	3
4	2
3	1
1	

5	3
4	2
3	1
1	

5	3
4	2
3	1
1	

需要注意的是，我们的勾长继续使用 λ 的勾长，不过仅仅统计 λ/D 内的方格而已。因此，根据斜角勾长公式，我们有

$$f^{\lambda/\mu} = 5! \cdot \left(\frac{1}{3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 1} + \frac{1}{3 \times 4 \times 2 \times 3 \times 1} + \frac{1}{5 \times 3 \times 4 \times 3 \times 1} \right) = 9.$$

4.3.7 移位形

考虑一个严格划分 λ , λ^* 是它的移位形图(shifted diagram), 令 $g^\lambda := |\text{SYT}(\lambda^*)|$ 为 λ 的移位形 λ^* 的标准杨表的个数。如同普通形, 移位形也有三种公式, 第一个乘积公式的发现者是 SCHUR, 同样使用表示论方法找到这个公式, 之后 TRALL 利用迭代和组合工具得到了同一个公式。

定理 4.44. (Schur, 移位乘积公式) 对任意严格划分 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$,

$$g^\lambda = \frac{|\lambda|!}{\prod_{i=1}^t \lambda_i!} \cdot \prod_{(i,j): i < j} \frac{\lambda_i - \lambda_j}{\lambda_i + \lambda_j}.$$

为了能给出移位形的勾长公式, 我们需要定义移位图的勾长。这个定义承接于原始的勾长定义

定义 4.45. (移位勾长) 对于任意一个移位图的方块 $c = (i, j) \in [\lambda^*]$, 我们称

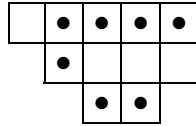
$$H_c^* := [\lambda^*] \cap (\{(i, j)\} \cup \{(i, j') | j' > j\} \cup \{(i', j) | i' > i\} \cup \{(j+1, j') | j' \geq j+1\})$$

为对应的移位勾 (shifted hook), 且称

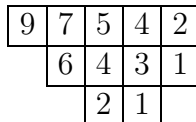
$$h_c^* := |H_c^*| = \begin{cases} \lambda_i + \lambda_{j+1}, & \text{if } j < t; \\ \lambda_i - j + |\{i' | i' > i, \lambda_{i'} + i' \geq j+1\}|, & \text{if } j \geq t. \end{cases}$$

为勾长 (hook length)。

这个定义看起来比较抽象, 我们先看个例子, 比如 $\lambda = (5, 4, 2)$ 这一严格划分, 我们可以得到它的如下移位图。我们可以计算移位勾和勾长 $H_{(1,2)}^*$ 和 $h_{(1,2)}^*$ 。



移位勾包含 (1,2) 这个方块和它正右方以及正下方所有方块, 还有第 $2+1=3$ 行的所有方块, 我们将其用黑点标注在上图中。则勾长 $h_{(1,2)}^* = 7$ 。我们下图中标注出每个方块对应的勾长: (比如 $H_{(1,1)}^*$ 包含第一行5个和第二行的4个方格, 因此 $h_{(1,1)}^* = 9$)



定理 4.46. (移位勾长公式) 对于任意严格划分 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$, 我们有

$$g^\lambda = \frac{|\lambda|!}{\prod_{c \in [\lambda^*]} h_c^*}.$$

定理 4.47. (移位行列式公式) 对于任意严格划分 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$, 我们有

$$g^\lambda = \frac{|\lambda|!}{\prod_{(i,j): i < j} (\lambda_i + \lambda_j)} \cdot \det \left[\frac{1}{(\lambda_i - t + j)!} \right]_{i,j=1}^t,$$

我们约定对于负整数 k , $\frac{1}{k!} := 0$ 。

我们同样可以证明移位图的三个SYT公式都是等价的，且移位行列式公式的证明和斜角行列式公式证明类似。

4.3.8 截断形

截断形图(truncated shape diagram)是一个把普通杨图或者移位形图在右上角删除一些空格的线凸图。比如下面两个截断形分别是 $[(4, 3, 2, 1) \setminus (1)]$ 和 $[(4, 3, 2, 1)^* \setminus (1, 1)]$



我们先考虑一种移位的楼梯形，即 $\delta_n := (n, n-1, \dots, 2, 1)$ ，也就是右上角往下

分别是 n 个方块， $n-1$ 个方块到1个方块。这种移位形可以通过 Schur 的乘积公式得到

$$g^{\delta_n} = N! \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \frac{i!}{(2i+1)!},$$

其中 $N := |\delta_n| = \binom{n+1}{2}$ 。

由此我们可以得到移位截断形 $\delta_n \setminus (1)$ 的 SYT 总数公式。

定理 4.48. 移位截断形 $\delta_n \setminus (1)$ 的 SYT 总数等于

$$g^{\delta_n} \frac{C_n C_{n-2}}{2C_{2n-3}},$$

其中 $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ 是 n 阶 Catalan 数。

上述公式可以推广到右上角截断 $(k-1) \times (k-1)$ 的形式 $\delta_{m+2k} \setminus ((k-1)^{k-1})$:

推论 4.49. 移位截断形 $\delta_{m+2k} \setminus ((k-1)^{k-1})$ 的 SYT 总数等于

$$g^{(m+k+1, \dots, m+3, m+1, 1)} g^{(m+k+1, \dots, m+3, m+1)} \cdot \frac{N!M!}{(N-M-1)!(2M+1)!},$$

其中 $N = \binom{m+2k+1}{2} - (k-1)^2$ 是截断移位形的大小, $M = \frac{k(2m+k+3)}{2} - 1$.

更多的截断形, 包括矩形截断等等, 可以参见 [3] 的第8节以及 Adin 的 slides。

4.3.9 勾长公式的证明历史

在这一小节, 我们来谈谈勾长公式的证明。虽然在第4.3.5小节中我们提到勾长公式和乘积公式以及行列式公式是等价的, 且行列式公式已经给出证明 (参见 [3] 定理 5.6 的证明, 第18-20页), 我们还是愿意谈谈勾长公式的直接证明的历史。

第一个有意思的证明是概率证明。一个开创性的例子是 GREENE-NIJENHUIS-WILF [8] 给出的普通杨图的勾长公式, 这一概率证明可以参见 SAGAN 的 Symmetric Groups 第一版的第97页或者第二版的第137页习题17。ADIN 和 ROICHMAN 的综述文章 [3] 的 6.1 根据 Sagan 第一版的证明给出了比较详尽的大纲。

另一个证明方式是利用双射, 两个著名的算法归功于 FRANZBLAU-ZEILBERGER [9] 和 NOVELLI-PAK-STOYANOVSKII [10]。它们都利用一个相同的双射: SYT \rightarrow hook function。在 ADIN 和 ROICHMAN 的综述文章 [3] 中有比较详细的阐述。

MACMAHON 使用了偏微分方程来引入 Ballot 序列和等价的 SYT 公式, 之后 ZEILBERGER 改良了 MACMAHON 证明给出了勾长公式的偏微分算子的证明方法。(参见 [3] 的 6.3)

5 群的表示

5.1 群与群的矩阵表示

让我们首先回顾一些群的概念。在群 G 中, g, h 称为共轭的, 当且仅当存在某个元素 $k \in G$ 使得 $g = khk^{-1}$ 。所有 g 的共轭元素组成的集合称为共轭类, 记为 K_g 。容易知道共轭关系是一种等价关系, 所以任意群都能被共轭类划分。至于 S_n 的共轭类, 容易知道如果 $\pi = (i_1, i_2, \dots, i_l) \cdots (i_m, i_{m+1}, \dots, i_n)$ 则对任意置换 $\sigma \in S_n$, 我们有

$$\sigma \pi \sigma^{-1} = (\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_l)) \cdots (\sigma(i_m), \sigma(i_{m+1}), \dots, \sigma(i_n)).$$

这表明任意两个在同一共轭类的置换当且仅当它们有相同的循环型。

注意到, 上述的等式是成立的, 因为假设 $\pi(i_1) = i_2$, 则 $\sigma \pi \sigma^{-1}(\sigma(i_1)) = \sigma \pi(i_1) = \sigma(i_2)$ 。也就是说, $\sigma \pi \sigma^{-1}: \sigma(i_1) \mapsto \sigma(i_2)$ 。

因此存在一个自然的从 n 的划分到 S_n 的共轭类的双射, 也存在一个大小为 n 的杨图到 S_n 的共轭类的双射。

共轭类的个数可以通过中心化子计算。元素 $g \in G$ 的中心化子(centralizer)的定义为 $Z_g = \{h \in G | hgh^{-1} = g\}$, 也就是全体和 g 交换的元素。由此存在一个 Z_g 的陪集到 K_g 中任意元素的双射, 因此

$$|K_g| = \frac{|G|}{|Z_g|}.$$

例 5.1. $g = (123)(456) \in S_6$, 则 $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in Z_g$.

对于对称群 $G = S_n$, 我们使用 K_λ 表示 K_g 拥有循环型 λ 的共轭类, 则我们有如下结论:

命题 5.2. 如果 $\lambda = (1^{m_1}, \dots, n^{m_n})$ 且 $g \in S_n$ 拥有循环型 λ , 则所有 g 的中心化子数量

$$z_\lambda := |Z_g| = 1^{m_1} m_1! 2^{m_2} m_2! \cdots n^{m_n} m_n!$$

证明. 任意到 $h \in Z_g$ 可以置换每个相同的子循环 (cycle) 内的元素 ($m_i!$ 种), 或者轮换子循环内部的元素 (i^{m_i} 种) 而不影响 g 。□

由此结果我们可以快速的算出每个 S_n 的共轭类的势。

一个群 G 的矩阵表示(matrix representation)指的是一个群同构 $X: G \rightarrow GL_d$. 其中 GL_d 是 $d \times d$ 的全体可逆矩阵, 并记 $d = \deg X$ 为该表示的维度(dimension)或次数(degree)。由于是群同构, 必然有 $X(e) = I$ 以及 $X(gh) = X(g)X(h)$, $\forall g, h \in G$ 。

例 5.3. (C_4 的一维表示) 比如我们考虑循环群 $C_4 = \{g, g^2, g^3, g^4 = \epsilon\}$ 的全部一维矩阵表示。因为确定任何一个群中元素的像就能确定整个表示，假设 $X(g) = (c)$, $c \in \mathbb{C}$, 则 $X(g^k) = (c^k)$. 因此 $(c^4) = X(g^4) = X(\epsilon) = 1$, 因此 c 是一个4次单位根, 即 $1, i, -1, -i$ 之一。由此, 我们可以确认所有的表示 $X^{(i)}$, 并得到下表

	ϵ	g	g^2	g^3
$X^{(1)}$	1	1	1	1
$X^{(2)}$	1	i	-1	$-i$
$X^{(3)}$	1	-1	1	-1
$X^{(4)}$	1	$-i$	-1	i

这恰好是 C_4 的特征标表(Character table)。

当然我们还可以考虑高阶的矩阵表示。不过实际上, 循环群的所有表示都能够越化为一维的表示的直和。这些内容我们将要继续考察。

例 5.4. 对于对称群 S_n , 我们已经知道 sign 是一个非平凡的群同构, 我们称 $X(\pi) = (\text{sgn}(\pi))$ 为一个**符号表示**(sign representation), 它是一个1维表示。

另外一个重要的 S_n 的表示称为**定义表示**(defining representation), 它的维度为 n 。这是一个非常“稀疏”的表示, 如果 $\pi \in S_n$, 令 $X(\pi) = (x_{ij})_{n \times n}$, 其中

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{如果 } \pi(j) = i, \\ 0 & \text{其他情况。} \end{cases}$$

这个矩阵 $X(\pi)$ 被称为置换矩阵, 因为它只包含零和一, 且每行每列都仅有一个1。

接下来我们需要引入 G -模和群代数的概念。

5.2 G -模和群代数

因为**每个矩阵都是一个线性变换**, 因此我们可以把矩阵表示看作是线性变换的表示, 这就是 G -模的概念。令 V 为一个线性空间(有限维的复空间), 令 $\text{GL}(V)$ 表示所有的可逆的线性变换 $A \in \text{End}(V)$, 我们称为 V 的一般线性群。如果 $\dim(V) = d$, 则 $G(V)$ 和 GL_d 在群的意义上是同构的。

定义 5.5. 令 V 为一个向量空间, G 为一个群, 则称 V 是一个 G -模 (G -module) 当且仅当存在一个群同态

$$\rho: G \rightarrow \text{GL}(V).$$

等价地, V 是一个 G -模当且仅当存在一个乘法 gv 满足如下性质: ($\forall g, h \in G; v, w \in V; c, d \in \mathbb{C}$.)

1. $gv \in V$
2. $g(cv + dw) = c(gv) + d(gw)$

$$3. (gh)v = g(hv)$$

$$4. \epsilon v = v$$

也就是说 G -模相当于在向量空间中附加了一个乘法，这个乘法满足群的结合律和对线性空间加法的左分配率。

注意 5.6. 简而言之， G 模就是一个 G 可以恰当作用在其上的线性空间。注意到一个 G 模和一个 G 的表示 ρ 是一一对应的，所以确定了一个 G 模就确定了一个表示，而这个表示可以用矩阵表达，反之亦然。

注记 5.7. 环上的模是环加上一个数乘等价于一个弱化的线性空间，而 G -模是线性空间加上一个乘法群，是一个强化的线性空间。不过它们都有类似的模性质。

事实上，上述 G -模的乘法等价于用矩阵表示的乘法，假设一个矩阵表示 X 的维度为 d ，令 $V = \mathbb{C}^d$ 是一个维度为 d 的列向量空间，则我们有

$$gv := X(g)v,$$

右方的乘法为矩阵乘法。反过来，如果 V 是一个 G -模，取 V 的任何一个基 \mathcal{B} 。则 $X(g)$ 可以表示为线性变换 $g \in G$ 在基 \mathcal{B} 上的展开。

我们知道 G 可以作用到一个集合 S ，从而可以扩展作用在 $\mathbb{C}S$ 上，这使得 $\mathbb{C}S$ 成为一个维度为 $|S|$ 的 G -模。

如果一个 G 作用在一个集合 S ，则对应的 G -模 $\mathbb{C}S$ 被称为与 S 相关的**置换表示**(permutation representation)。S中的所有元素也组成了 $\mathbb{C}S$ 的标准基。

例 5.8. 我们考虑 $G = S_n$, $S = [n]$ ，则 $\mathbb{C}S = \{c_1 1 + c_2 2 + \cdots + c_n n \mid c_i \in \mathbb{C}\}$ 满足

$$\pi(c_1 1 + c_2 2 + \cdots + c_n n) = c_1 \pi(1) + \cdots + c_n \pi(n).$$

现在考虑 S_3 作用到 $S = [3]$ ，我们考虑 $\pi = (1, 2) \in S_3$ 。我们可以计算它对每个基的向量的作用， $(1, 2)1 = 2; (1, 2)2 = 1; (1, 2)3 = 3$ 。也就是说，我们有

$$X((1, 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

如果我们计算完所有的矩阵表示，这正是**定义表示**(defining representation)。

下面我们来介绍一个任意群的一个更重要的表示——(左) **正规表示**。令 G 为任意群，则群可以作用到其自身，即令 $S = G$ ，则作用为群自带的乘法。显然满足定义5.1的第1,3,4条。我们可以定义一个类似于 $\mathbb{C}S$ 的 G -模 $\mathbb{C}[G]$

$$\mathbb{C}[G] = \{c_1 g_1 + \cdots + c_n g_n \mid c_i \in \mathbb{C}\},$$

称之为 G 的群代数。

注意到使用的中括号表示这不仅仅是线性空间而是代数。这个代数的乘法是自然继承于群里的乘法。

我们现在继续考虑循环群的例子 $G = C_4$ 。我们知道它的群代数为

$$\mathbb{C}[C_4] = \{c_1\epsilon + c_2g + c_3g^2 + c_4g^3 | c_i \in \mathbb{C}\}$$

我们可以计算群中每个元素在标准基上的矩阵，比如考察元素 g^2 ，可以得到

$$g^2\epsilon = g^2, \quad g^2g = g^3, \quad g^2g^2 = g^4, \quad g^2g^3 = g.$$

$$X(g^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

一般的，群 G 的正规表示给出了一个 G 到对称群 $S_{|G|}$ 的一个嵌入，这等价于群理论的 CAYLEY 定理。

注意到如果 G 能作用到 V ，则群代数 $\mathbb{C}[G]$ 也能作用到 V ，即存在群代数的“表示”。明确地说，我们可以定义作用

$$(c_1g_1 + \cdots + c_ng_n)v = c_1(g_1v) + \cdots + c_n(g_nv).$$

事实上，我们可以由此扩展群表示为代数的表示，一个代数 A 的表示即是一个代数同构 $A \rightarrow \text{GL}(V)$ 。

我们还能推广正规表示为陪集表示。令 $H \leq G$ 为 G 的子群，我们定义一个 G 相对于 H 的陪集表示如下。令 $\mathcal{H} = \{g_1H, \dots, g_kH\}$ 为 H 的所有（左）陪集，则 G 作用在 \mathcal{H} ， $g(g_iH) = (gg_i)H$ 。由此得到的 G -模

$$\mathbb{C}\mathcal{H} = \{c_1g_1H + \cdots + c_kg_kH | c_i \in \mathbb{C}\}.$$

继承了上述作用。如果 $H = G$ ，则这简化为平凡表示，如果 $H = \{\epsilon\}$ ，则恰好是正规表示。一般情况下，陪集表示是一个诱导表示(reduced representation)的例子。下面我们给出一个具体例子。

例 5.9. 令 $G = S_3$, $H = \{\epsilon, (2, 3)\}$ ，则 $\mathcal{H} = \{H, (1, 2)H, (1, 3)H\}$ ，于是

$$\mathbb{C}\mathcal{H} = \{c_1H + c_2(1, 2)H + c_3(1, 3)H | c_i \in \mathbb{C}\}.$$

我们可以计算 $(1, 2)$ 在标准基的表示，得到

$$(1, 2)H = (1, 2)H, (1, 2)(1, 2)H = H, (1, 2)(1, 3)H = (1, 3, 2)H = (1, 3)H$$

于是我们有

$$X((1, 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

这也恰好是定义表示。

我们称一个线性变换 $\theta: V \rightarrow W$ 是一个 **G-同态**，当且仅当 $\theta(gv) = g\theta(v)$ ，即 θ 保持所有的作用。而 G -同构是双射的 G -同态。

我们现在来揭示为什么上述陪集表示和定义表示是等价的。给定任意集合 A ，令 S_A 为 A 的对称群，即所有的置换。则 H 可以表述为内直积：

$$H = \{(1)(2)(3), (1)(2, 3)\} = \{(1)\} \times \{(2)(3), (2, 3)\} = S_{\{1\}} \times S_{\{2,3\}}$$

在这里我们引入**杨报**(Young tabloid)的概念，注意这和标准杨表 (standard Young tableau) 并不相同。此处的杨报仅仅表示一个可以行内互换的不考虑其他任何关系的表格。比如对于一个划分 $\lambda = (4, 2, 1)$ ，下面有几个它的杨报的例子。

$$\begin{array}{c} \overline{3 \ 1 \ 4 \ 1} \\ \overline{5 \ 9} \\ \underline{2} \end{array} = \begin{array}{c} \overline{3 \ 1 \ 1 \ 4} \\ \overline{9 \ 5} \\ \underline{2} \end{array} \neq \begin{array}{c} \overline{9 \ 5 \ 3 \ 4} \\ \overline{1 \ 1} \\ \underline{2} \end{array}.$$

由此，我们可以把 H 表为杨报形式。由于它是由包含 $\{1\}$ 和 $\{2, 3\}$ 的两个对称群组成，因此对应的杨报可以写为

$$\begin{array}{c} \overline{2 \ 3} \\ \underline{1} \end{array},$$

而全体的 $\lambda = (2, 1)$ 的杨报形式为

$$S = \left\{ \begin{array}{c} \overline{2 \ 3} \\ \underline{1} \end{array}, \begin{array}{c} \overline{1 \ 3} \\ \underline{2} \end{array}, \begin{array}{c} \overline{1 \ 2} \\ \underline{3} \end{array} \right\}.$$

令任意的置换群 $\pi \in S_3$ 作用到 S 上

$$\pi \frac{\overline{i \ j}}{\underline{k}} = \frac{\overline{\pi(i) \ \pi(j)}}{\underline{\pi(k)}}.$$

于是我们可以扩展 H 到杨报映射到全部陪集得到

$$\begin{aligned} H &\xrightarrow{\theta} \begin{array}{c} \overline{2 \ 3} \\ \underline{1} \end{array}, \\ (1, 2)H &\xrightarrow{\theta} (1, 2) \begin{array}{c} \overline{2 \ 3} \\ \underline{1} \end{array} = \begin{array}{c} \overline{1 \ 3} \\ \underline{2} \end{array}, \\ (1, 3)H &\xrightarrow{\theta} (1, 3) \begin{array}{c} \overline{2 \ 3} \\ \underline{1} \end{array} = \begin{array}{c} \overline{1 \ 2} \\ \underline{3} \end{array}. \end{aligned}$$

也就是说我们拥有一个向量空间的同构 $\theta: \mathbb{C}\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}S$. 并且进一步地, 这是一个 G -同构。在另一方面, 集合 S 和我们的标准基 $\{1, 2, 3\}$ 是一一对应的, 事实上, 这个双射就是第二行与标准基的基相同。由此我们可以定义一个从 $\mathbb{C}\{1, 2, 3\}$ 到 $\mathbb{C}S$ 的 G -同构。由此可以得到 $\mathbb{C}\mathcal{H} \cong \mathbb{C}\{1, 2, 3\}$ 。

关于 G -同构, 我们容易知道有如下结论:

命题 5.10. 令 $\theta: V \rightarrow W$ 为一 G -同态, 则

1. $\ker\theta$ 是一个 V 的 G -子模;
2. $\text{img}\theta$ 是一个 W 的 G -子模.

5.3 可约性

一个遍及所有科学的理念是, 大的结构可以通过把它们分解成最小的部分来理解。在表示论也是如此。一些表示能够由较小的表示构建的, 然而另外一些却不可以。这正是可约和不可约的表示的区别。

一个 G -模的子模是那些依然在 G 作用下闭合的子空间, 我们又称之为 **G -不变子空间**。一个简单的例子是, $G = S_n, V = \mathbb{C}\{1, 2, \dots, n\}$, 则 $W = \mathbb{C}\{1 + 2 + \dots + n\}$ 是一个 V 的 G -不变子空间。因为 G 中任意元素作用到 W 上都保持不变, 这种情况我们称 G 平凡作用到 W 上。

定义 5.11. (不可约 G -模) 一个非零的 G -模 V 是可约的是指它包含一个非平凡子模。否则, 称 V 是不可约的。

等价地, V 是可约的是指存在一个基 B 使得对任意 $g \in G$, 都能表成如下形式

$$X(g) = \begin{pmatrix} A(g) & B(g) \\ 0 & C(g) \end{pmatrix},$$

其中 $A(g)$ 是同样大小的方阵。

两者的等价性在 SAGAN 书 [1] 中有详细解释。容易知道任意一个一维的表示都是不可约的。而检验任意一个表示是否是不可约的是一个比较困难的问题。这种不满意的状况将在我们讨论群的特征标的内积后得到改进。

前面的例子说明 S_n 的定义表示和任意群的群代数都是可约的 (如果群的阶大于等于 2)。现在我们来验证一下上述关于可约表示定义的等价性。

例 5.12. 考虑 S_3 和它的定义表示, 则 $V = \mathbb{C}\{1, 2, 3\}$ 。令 $W = \mathbb{C}\{1 + 2 + 3\}$, 定义 V 的一个新基 $B = \{1 + 2 + 3, 2, 3\}$ 。我们可以计算 $X((1, 2))$, 看看它在新基上的表示:

$$(1, 2)(1 + 2 + 3) = (1 + 2 + 3), (1, 2)(2) = 1 = (1 + 2 + 3) - 2 - 3, (1, 2)3 = 3.$$

于是有

$$X((1, 2)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

同理我们可以求得其他的作用在新基的表示:

$$\begin{aligned} X((1, 3)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & X((2, 3)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ X((1, 2, 3)) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, & X((1, 3, 2)) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

它们都有如下形式:

$$X(\pi) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & * & * \\ \hline 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{array} \right).$$

5.3.1 完全可约性和 Maschke 定理

如果我们能把可约 G -模的矩阵变成块对角形式就更好了, 如此一来我们便可以写成直和的形式。

我们知道, 一个向量空间能写做两个子空间的直和当且仅当它的任意向量都能够唯一表示为两个子空间的向量的和。如果向量空间是 G -模, 且它的两个 G -子模均满足上述性质, 我们称它们为**互补子模**。

同样地我们继续考虑 S_3 的定义表示, 我们知道作为向量空间,

$$V = \mathbb{C}\{1, 2, 3\} = \mathbb{C}\{1 + 2 + 3\} \oplus \mathbb{C}\{2, 3\}.$$

但是显然 $\mathbb{C}\{2, 3\}$ 不是 V 的子模, 因为 $(1, 2)2 = 1 \notin \mathbb{C}\{2, 3\}$, 群作用下不是封闭的。所以我们可以尝试寻找 $\mathbb{C}\{1 + 2 + 3\}$ 的另一个互补子模 W^\perp 。

寻找互补子模我们需要定义一个内积, $\langle i, j \rangle = \delta_{ij}$, 其中 δ_{ij} 是 Kronecker delta 符号。那么定义**正交补**为

$$W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \text{ for all } w \in W\}.$$

且我们有 $V = W \oplus W^\perp$, 但是我们需要考虑 W^\perp 是不是不仅仅是子空间而且也是子模。我们有如下结论。

命题 5.13. 令 V 为 G -模, W 是一子模, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是一个在 G 作用下不变的内积, 则 W^\perp 也是一个 G -子模。

证明. 我们需要证明对任意 $g \in G$, 和 $u \in W^\perp$, 我们有 $gu \in W^\perp$. 令 $w \in W$ 为任意元素, 则

$$\begin{aligned}\langle gu, w \rangle &= \langle g^{-1}gu, g^{-1}w \rangle \\ &= \langle u, g^{-1}w \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

因此 W^\perp 在 G 作用下是封闭的. □

例 5.14. 根据这一命题, 我们可以得到

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\{1+2+3\}^\perp &= \{v = a1 + b2 + c3 | \langle v, 1+2+3 \rangle = 0\} \\ &= \{v = a1 + b2 + c3 | a + b + c = 0\}\end{aligned}$$

经过计算我们可以选择 $\{2-1, 3-1\}$ 来做为 $\mathbb{C}\{1+2+3\}^\perp$ 的基。由此计算可以得到, $X(g)$ 在这一基上的表示拥有如下形式:

$$X(g) = \left(\begin{array}{c|cc} A(g) & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \\ 0 & & B(g) \end{array} \right).$$

其中 $A(g)$ 是不可约的, 我们还将证明 $B(g)$ 也是不可约的。这就将 S_3 的定义表示分解为两个不可约的表示。这一结果可以推广到任意有限群, 并有如下重要定理。

定理 5.15. (Maschke定理) 令 G 为一有限群, V 为一非零 G -模, 则

$$V = W^{(1)} \oplus \cdots \oplus W^{(k)},$$

其中 $W^{(i)}$ 是 V 的不可约 G -模。

这个定理的证明使用数学归纳法, 在大多数群表示论和非交换代数课本都能找到, 具体证明可以参见 Sagan 的书 [1] 中第16也证明, 此处从略。

由此可以得到矩阵形式的 Maschke 定理。

推论 5.16. 令 G 为一有限群, X 为一个 $d > 0$ 维的 G 的矩阵表示。则存在一个固定的矩阵 T 使得任意矩阵 $X(g), g \in G$ 有如下形式

$$TX(g)T^{-1} = \begin{pmatrix} X^{(1)}(g) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X^{(2)}(g) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X^{(k)}(g) \end{pmatrix},$$

其中 $X^{(i)}$ 是 G 的不可约的矩阵表示。

一个表示称为**完全可约**的当且仅当其能被写为一系列不可约的表示的直和。所以 Maschke 定理也可以表述为为，任意有限群的有限维表示是完全可约的。

如果替换基域 \mathbb{C} 为任意特征为零或者特征与 $|G|$ 互素的域， Maschke 定理依然成立。

5.3.2 Schur引理

我们在第5.2小节已经知道了一些 G -同态的一些性质， 而下面的 Schur 引理在群表示中占据非常重要的地位。

定理 5.17. (Schur引理) 令 V, W 为两个不可约 G -模， 如果存在一个 G -同态 $\theta: V \rightarrow W$ ， 则下列两种情况必然有一种成立

1. θ 是 G -同构， 或者
2. θ 是零映射。

这一定理是命题 5.10 的直接推论。因为如果 V 是不可约的， 则 $\ker \theta$ 是一个子模， 且 $\ker(\theta) = \{0\}$ 或者 $\ker(\theta) = V$ 。类似的， W 的不可约性意味着 $\text{im} \theta = \{0\}$ 或者 W 。所以两种情况分别对应 θ 是同构或是零映射。

我们依然还可以得到一个矩阵表示的版本。

命题 5.18. 令 X, Y 为 G 的两个不可约的矩阵表示。 如果任意矩阵 T 满足 $TX(g) = Y(g)T$ (对任意 $g \in G$)， 则下列两种情况必然有一种成立

1. T 是可逆矩阵， 或者
2. T 是零矩阵。

如果我们考虑 T 与不可约矩阵 X 交换， 在基域 \mathbb{C} 中我们有：

推论 5.19. 令 X 为 G 任意复不可约矩阵表示， 则唯一和所有 $X(g)$ 交换的矩阵是 cI ， 其中 I 是单位矩阵， $c \in \mathbb{C}$ 。

这一推论中与给定表示交换的矩阵 T 构成的集合是重要的， 我们可以定义**换位代数**(commutant algebra)如下： 给定一个矩阵表示 $X: G \rightarrow \text{GL}_d$ ， 则相对应的换位代数为

$$\text{Com } X = \{T \in \text{Mat}_d(\mathbb{C}) | TX(g) = X(g)T, \forall g \in G\}.$$

类似地， 对于 G -模 V ， 我们可以定义**自同态代数**

$$\text{End } V = \{\theta: V \rightarrow V | \theta \text{ 是一个 } G\text{-同态}\}.$$

我们可以验证，如果 X 是相关的矩阵表示，则 $\text{Com } X \cong \text{End } V$ （代数同构）。关于换位代数和自同态代数的更多内容参见 Sagan [1] 中的 1.7 节。

同样对于非不可约的 G -模 W ，我们也有 Schur 引理：

命题 5.20. 令 V, W 为两个 G -模，且 V 不可约。则 $\dim \text{Hom}(V, W) = 0$ 当且仅当 W 不包含任何同构于 V 的子模。

5.4 群的特征标

事实上，一个表示中大多数的信息都隐藏在对应矩阵的迹当中，这让我们专心研究这一矩阵迹的性质。我们把这个迹定义为特征标。

定义 5.21. (特征标) 令 $X(g), g \in G$ 为一个矩阵表示，则 X 的特征标定义为

$$\chi(g) = \text{tr } X(g).$$

我们定义一个 G -模 V 的特征标为对应矩阵的特征标。

注意 5.22. 由于迹在共轭作用下保持不变，因此 G -模 V 特征标的定义是有意义的。

我们先来考虑一个简单的例子—— S_3 的定义表示。我们用 χ^{def} 表示它的特征标。由于我们已经算出过它的矩阵形式(例子5.8)，由此可以得到

$$\begin{aligned} \chi^{\text{def}}((1)(2)(3)) &= 3, \quad \chi^{\text{def}}((1, 2)(3)) = 1, \quad \chi^{\text{def}}((1, 3), (2)) = 1, \\ \chi^{\text{def}}((1)(2, 3)) &= 1, \quad \chi^{\text{def}}((1, 2, 3)) = 0, \quad \chi^{\text{def}}((1, 3, 2)) = 0. \end{aligned}$$

容易知道对于任意 $\pi \in S_n$,

$$\chi^{\text{def}}(\pi) = X(\pi) \text{ 的对角线 } 1 \text{ 的个数} = \pi \text{ 的固定点个数}.$$

类似地，我们可以考察有限群 G 的正规表示的特征标。显然单位元的表示必然等价于单位矩阵，因此 $\chi^{\text{reg}}(\epsilon) = |G|$ 。而其他元素的表示由于没有固定点，因此特征标都为0，因此

$$\chi^{\text{reg}}(g) = \begin{cases} |G| & \text{if } g = \epsilon, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由此我们可以总结出一些特征标的性质：

1. 单位元的特征标等于其矩阵表示的次数；
2. 共轭类内的元素的特征标相等；
3. G -同构的表示的任意元素的特征标相等。

因此，我们也能选取共轭类中任意元素计算特征值来代替共轭类的特征值。

我们把满足性质二的 $f: G \rightarrow \mathbb{C}$ 的映射推广定义为类函数(class function)。也就是说，如果 $f(h) = f(g)$ 对任意在相同群的共轭类的元素成立，则称 f 为类函数。容易知道，类函数相加以及数乘都是类函数。因此所有的类函数集合是一个复线性空间。

定义 5.23. (特征标表) 一个群 G 的特征标表是一个由不相等的不可约特征标 χ 作为行指标，而共轭类 K 作为列指标的表格。表格的元素是 $\chi(K)$ 。

为了简便，我们把第一行定为平凡特征标，第一列定为单位元（共轭类）的特征标。事实上，不可约的表示的数量和共轭类一样多，因此特征标表总是方形的。

下面我们继续考察我们最熟悉的例子 S_3 的特征标表。我们知道 S_3 有三个共轭类，

$$K_1 = \{\epsilon\}, K_2 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}, K_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2)\}.$$

因此 S_3 有三个不可约的表示。而其中两个我们已经知道就是都是一维的平凡表示和符号表示。它们对应的特征标如下表：

	K_1	K_2	K_3
$\chi^{(1)}$	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1	1
$\chi^{(3)}$	a	b	c

而第三行的特征标的确定我们需要运用到特征标的内积来解决，这是我们下一小节的主要内容。

5.4.1 特征标的内积

定义任意两个函数 $\chi, \psi: G \rightarrow \mathbb{C}$ 的内积为

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi(g)}.$$

如果令函数为特征标，则有

命题 5.24. (特征标公式) 令 χ, ψ 为特征标, 则

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \psi(g^{-1}).$$

我们可以证明 (参考 Sagan [1] 第35-37页) 不可约特征标都是正交的。

定理 5.25. (第一类特征标关系) 令 χ, ψ 为 G 的不可约特征标, 则

$$\langle \chi, \psi \rangle = \delta_{\chi\psi}.$$

由此我们有一系列有用的推论:

推论 5.26. 令 X 为 G 的一个矩阵表示, 且拥有特征标 χ . 假设

$$X \cong m_1 X^{(1)} \oplus m_2 X^{(2)} \oplus \cdots \oplus m_k X^{(k)},$$

其中 $X^{(i)}$ 是拥有特征标 $\chi^{(i)}$ 的互相不等价的不可约矩阵。

1. $\chi = m_1 \chi^{(1)} + \cdots + m_k \chi^{(k)}.$
2. 对任意 j , $\langle \chi, \chi^{(j)} \rangle = m_j$
3. $\langle \chi, \chi \rangle = m_1^2 + \cdots + m_k^2.$
4. X 是不可约的当且仅当 $\langle \chi, \chi \rangle = 1$.
5. 令 Y 为另一个拥有特征标 ψ 的 G 的矩阵表示, 则

$$X \cong Y \iff \chi(g) = \psi(g), \quad \forall g \in G.$$

例 5.27. 我们现在来完成上一小节遗留的特征标表的问题。考虑 $\chi = \chi^{\text{def}}$ 。另 $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \chi^{(3)}$ 为 S_n 的三个不可约的特征标, 其中前两个分别是平凡特征标和符号特征标。根据 Maschke 定理, 我们知道有

$$\chi = m_1 \chi^{(1)} + m_2 \chi^{(2)} + m_3 \chi^{(3)}.$$

注意到 π 与它的逆是共轭的, 因此特征标相等。根据特征标公式和推论 5.26 我们有

$$m_1 = \langle \chi, \chi^{(1)} \rangle = \frac{1}{3!} \sum_{\pi \in S_3} \chi(\pi) \chi^{(1)}(\pi) = \frac{1}{6} (3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = 1$$

$$m_2 = \langle \chi, \chi^{(2)} \rangle = \frac{1}{3!} \sum_{\pi \in S_3} \chi(\pi) \chi^{(2)}(\pi) = \frac{1}{6} (3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = 0$$

由此可得

$$\chi = \chi^{(1)} + m_3 \chi^{(3)}.$$

当我们分解定义特征标的时候，我们已经知道定义特征标包含一个平凡特征标，也就是说我们有 $X = A \oplus B$ ，其中 A 是我们的平凡特征标，而剩下的部分即是 B 。这里我们要把原方阵化为直和的矩阵形式，得到剩余部分为 B 。这在例子5.14和 Sagan [1]书中第13、15 页有计算方法。

由此可以得到一个的特征标 ψ ，因其满足

$$\langle \psi, \psi \rangle = \frac{1}{6}(2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2 + (-1)^2) = 1$$

故是不可约表示，也就是说 $\chi^{(3)} = \psi$. 因此我们也完成了 S_3 的特征值标，即 $a = 2, b = 0, c = -1$.

事实上，我们不求出 $\chi^{(3)}$ ，也能完成特征标表，因为我们知道 $\chi^{(3)}$ 满足如下等式

$$\begin{aligned} a^2 + 3b^2 + 2c^2 &= 6 \\ a + 3b + 2c &= 0 \\ a - 3b + 2c &= 0 \end{aligned}$$

由此可得到 $b = 0, a = -2c$. 而显然 a 等于表示的维度，因此必然是正整数。故 $a = 2, c = -1$.

事实上，对于任意 S_n , $\chi^{\text{def}} = \chi^{(1)} + \chi^\perp$ 都是不可约分解，即 χ^\perp 是不可约特征标。

5.4.2 群代数分解和第二类特征标关系

根据 Maschke 定理，我们可以把群代数 $\mathbb{C}[G]$ 写为 $\mathbb{C}[G] = \oplus m_i V^{(i)}$. 由之前的结论我们有

命题 5.28. 令 G 为一个有限群，假设 $\mathbb{C}[G] = \oplus_i m_i V^{(i)}$ ，其中 $V^{(i)}$ 为全部不等价的不可约 G -模，则有

1. $m_i = \dim V^{(i)}$,
2. $\sum_i (\dim V^{(i)})^2 = |G|$ 以及
3. $V^{(i)}$ 的数量和 G 的共轭类的数量相等。

这个命题的第三部分是特征标表是方形的基础，它的证明利用了

$$\#V^{(i)} = \dim Z_{\text{End } \mathbb{C}[G]}.$$

具体证明参见 Sagan [1] 的第40-41 页。

由此我们得到特征标的一个重要性质：

定理 5.29. (第二类特征标关系) 令 K, L 为任意两个 G 的共轭类，则有

$$\sum_{\chi} \chi_K \overline{\chi_L} = \frac{|G|}{|K|} \delta_{K,L},$$

其中求和是对 G 所有的不可约特征标。

我们继续看之前的例子 S_3 的特征标。我们将使用第二类特征标关系求得 $\chi^{(3)}$ 。

根据命题5.28(2)有 $1^2 + 1^2 + a^2 = |S_3| = 6$ ，由此可得 $\chi^{(3)}(\epsilon) = a = 2$ 。这是我们进一步计算的基石。

进一步地，我们可以求得每一个作用的特定特征标，假设 $x = \chi^{(3)}((1, 2))$ ，则根据第二类特征标关系公式，我们有 (取 $K = \{\epsilon\}$)

$$0 = \sum_{i=1}^3 \chi^{(i)}(\epsilon) \overline{\chi^{(i)}((1, 2))} = 1 \cdot 1 + 1(-1) + 2 \cdot \bar{x},$$

由此可得 $x = 0$ 。我们再求剩下的共轭类中的 $y = \chi^{(3)}((1, 3, 2))$ ，根据第二公式，我们有

$$0 = \sum_{i=1}^3 \chi^{(i)}(\epsilon) \overline{\chi^{(i)}((1, 3, 2))} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot \bar{y},$$

因此 $y = -1$ 。这样我们也完成了特征标表。

接下来需要提及的是，常常对于一个“比较大”的有限群，求它的特征标表并不容易，如果它能表示为两个子群的直积，则我们可以通过计算两个子群的特征标来得到它的特征标。事实上

定理 5.30. 令 X 和 Y 分别为群 G 和 H 的矩阵表示，则

1. $X \otimes Y$ 是群 $G \times H$ 的一个表示；
2. 如果 $X, Y, X \otimes Y$ 有特征标 $\chi, \psi, \chi \otimes \psi$ ，则对任意 $(g, h) \in G \times H$,

$$(\chi \otimes \psi)(g, h) = \chi(g)\psi(h)$$

并且进一步地，两个不可约表示的张量积也是不可约的。

5.5 限制表示和诱导表示

限制表示和诱导表示考虑的是这样一个问题：如果 $H \leq G$ 且我们有其中一个群的表示，是否能得到另一个群的表示。我们可以使用限制（restriction）和诱导（induction）来得到这一结果。

定义 5.31. 假设 $H \leq G$ 已经一个 G 的矩阵表示 X ，我们定义 X 在 H 中的限制 $X \downarrow_H^G$,

$$X \downarrow_H^G(h) = X(h), \forall h \in H.$$

如果 X 有特征标 χ ，则记 $X \downarrow_H^G$ 的相应特征标为 $\chi \downarrow_H^G$ 。

反过来，要得到诱导表示看起来没有这么自然，这个方法来自于 FROBENIUS。简而言之，如果 V 是 H 的一个表示，我们定义 $V \uparrow_H^G := \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} V$ 。具体地，如果我们考察矩阵表示，

定义 5.32. 假设 $H \leq G$ ，固定 H 的左陪集使得 $G = t_1 H \uplus \cdots \uplus t_l H$ ，其中 \uplus 表示不相交并。如果 Y 是一个 H 的表示，则对应的诱导表示（induced representation） $Y \uparrow_H^G$ 满足对任意 $g \in G$,

$$Y \uparrow_H^G(g) = (Y(t_i^{-1} g t_j))_{l \times l}.$$

其中 $Y(g)$ 是零矩阵如果 $g \notin H$ 。

为了便于理解，我们先考虑一个之前提到的左陪集的例子，即 $G = S_3$, $H = \{\epsilon, (2, 3)\}$ ，且 $G = H \uplus (1, 2)H \uplus (1, 3)H$ 。令 $Y = 1$ 为 H 的平凡表示考虑 $X = 1 \uparrow_H^G$ 。我们可以通过定义先计算 $(1, 2)$ 的矩阵的第一行

$$\begin{aligned} Y(\epsilon^{-1}(1, 2)\epsilon) &= Y((1, 2)) = 0, & (\text{因为 } (1, 2) \notin H) \\ Y(\epsilon^{-1}(1, 2)(1, 2)) &= Y(\epsilon) = 1, & (\text{因为 } \epsilon \in H) \\ Y(\epsilon^{-1}(1, 2)(1, 3)) &= Y((1, 3, 2)) = 0, & (\text{因为 } (1, 2) \notin H) \end{aligned}$$

计算所有的情况，我们得到

$$X((1, 2)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

我们发现这一平凡表示的诱导表示和陪集表示(例子5.9)是一致的。

定理 5.33. 令 $H \leq G$ 且有截断 (*transversal, cross-section*) $\{t_1, \dots, t_l\}$, Y 是一个 H 的矩阵表示, 则 $X = Y \uparrow_H^G$ 是一个 G 的表示。

注记 5.34. 两个不同的截断诱导的表示是等价的。

接下来的重要结论揭示了限制和诱导表示的特征标的关系。

定理 5.35. (Frobenius 互反律) 令 $H \leq G$ 且假设 ψ, χ 分别为 H, G 的特征标, 则有

$$\langle \psi \uparrow_H^G, \chi \rangle = \langle \psi, \chi \downarrow_H \rangle,$$

其中左右两边的内积分别是在 G 和 H 中计算。

下面我们要定义划分之间的偏序。

6 S_n 的表示

6.1 λ -报和 M^λ 模

我们已经知道所有的不可约表示数量和共轭类数量相同，而对于 S_n 而言，共轭类数量和 n 的分拆数量是相同的。我们在上一节已经定义了杨表和任意集合的对称群，对于任意的分拆 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ ，我们找到子群 $S_\lambda \cong S_{\lambda_1} \times \dots \times S_{\lambda_l}$ ，接下来利用 S_λ 的平凡表示诱导到 S_n 上。

假设 M^λ 是一个 $1_{S_\lambda}^{S_n}$ 的模，我们显然不能要求它就是不可约的。不过，我们可以找到一个所有 n 的分拆的偏序（正如我们构建标准样表时那样） $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots$ 。于是显然第一个模 $M^{\lambda^{(1)}}$ 是不可约的，我们成为 $S^{\lambda^{(1)}}$ 。接下来的 $M^{\lambda^{(2)}}$ 只会包含不可约的 $S^{\lambda^{(1)}}$ 和新的不可约 $S^{\lambda^{(2)}}$ 。一般地， $M^{\lambda^{(i)}}$ 可以分解为 $S^{\lambda^{(k)}}$, $k < i$ ，且有唯一的新的不可约模 $S^{\lambda^{(i)}}$ ，我们称之为 **Specht 模**。

定义 6.1. 令 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \vdash n$ ，则它对应的 S_n 的杨子群 (Young subgroup) 为

$$S_\lambda = S_{\{1, 2, \dots, \lambda_1\}} \times S_{\{\lambda_1+1, \lambda_1+2, \dots, \lambda_1+\lambda_2\}} \times \dots \times S_{\{n-\lambda_l+1, n-\lambda_l+2, \dots, n\}}.$$

注记 6.2. 显然我们有 $S_\lambda \cong S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \dots \times S_{\lambda_l}$ 。

现在我们考虑诱导表示 $1_{S_\lambda}^{S_n}$ 。如果 π_1, \dots, π_k 是 S_λ 在 S_n 的截断，则向量空间

$$V^\lambda = \mathbb{C}\{\pi_1 S_\lambda, \dots, \pi_k S_\lambda\}$$

是一个我们诱导表示的模。

定义 6.3. (杨表) 假设 $\lambda \vdash n$ ，我们定义一个形状为 λ 的杨表 (Young tableau) 是一个杨图和 $[n]$ 的双射。

杨表和标准样表的区别是去掉了行列的递增性质，但是每个格子内的元素是互异的。

注记 6.4. 对于任何拆分 $\lambda \vdash n$ ，显然杨表的个数为 $n!$ 。

接下来我们要定义两个杨表 t_1, t_2 是 **行等价** (row equivalent) 的， $t_1 \sim t_2$ 当且仅当他们的每一行拥有同样的元素（即行内可以互相置换）。

我们称这样的等价类为 **λ -报** (λ -tabloid)，这显然是杨报的一种特殊情况，它要求了所有元素互异。显然 λ -报的个数为

$$\frac{n!}{\lambda!} = \frac{n!}{\lambda_1! \dots \lambda_l!}.$$

下面我们可以定义 λ 的置换模，它是所有 λ -报张成的线性空间：

定义 6.5. 假设 $\lambda \vdash n$, 令 $M^\lambda = \mathbb{C}\{\{t_1\}, \dots, \{t_k\}\}$, 其中 $\{t_i\}$ 包含所有的 λ -报。则称 M^λ 为 λ 的置换模。

例 6.6.

1. $\lambda = (n)$, 则 $M^{(n)} = \mathbb{C}\{\overline{12 \cdots n}\}$ 是平凡表示。
2. $\lambda = (1^n)$, 则 $M^{(1^n)} \cong \mathbb{C}S_n$ 是正规表示。
3. $\lambda = (n-1, 1)$, 则 $M^{(n-1, 1)} \cong \mathbb{C}\{1, 2, \dots, n\}$ 是定义表示（参见陪集表示）。因为每一个 λ -报取决于第二行，它有 n 种情况。

以下是 S_3 的这三个表示的特征标表：

	$K_{(1^3)}$	$K_{(2,1)}$	$K_{(3)}$
$\phi^{(3)}$	1	1	1
$\phi^{(2,1)}$	3	1	0
$\phi^{(1^3)}$	6	0	0

定义一个 G -模 M 是循环的(cyclic), 当且仅当存在一个 $v \in M$ 使得 $M = \mathbb{C}Gv$, 并称 M 由 v 生成。我们可以证明, M^λ 是循环的, 它由任意的 λ -报生成。 并且, $\dim M^\lambda = \frac{n!}{\lambda!}$ 。

我们令

$$\{t^\lambda\} = \frac{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & \lambda_1 \\ \hline \lambda_1 + 1 & \lambda_1 + 2 & \cdots & \lambda_1 + \lambda_2 \\ \hline & \vdots & & \\ \hline n - \lambda_l + 1 & \cdots & & n \end{array}}{n!}.$$

定理 6.7. 令 $\lambda \vdash n$ 及其杨子群 S_λ 和 λ -报 $\{t^\lambda\}$ 。则 $V^\lambda = \mathbb{C}S_n S_\lambda$ 和 $M^\lambda = \mathbb{C}S_n \{t^\lambda\}$ 是同构的 S_n -模。

下面我们定义 n 的不同分拆的 λ 的偏序。我们有两种等价的偏序，第一种称之为支配序 (Dominance ordering)，第二种称之为字典序 (Lexicographic ordering)。

第一种定义是 $\lambda \supseteq \mu$ ，这等价于对任意 $i \geq 1$:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i \geq \mu_1 + \cdots + \mu_i$$

超出部分设为0 即可。

字典序: $\lambda < \mu \iff \lambda_j = \mu_j$ 对任意 $j < i$ 且 $\lambda_i < \mu_i$ 。

6.2 Specht模与 S_n 的不可约表示

我们已经知道Specht模是所有的不可约 S_n -模。我们采取的方法是直接从群环直接构造出不可约模，间接但是便于把握的方法可见李文威的讲义 *Yanqi Lake Lectures on Algebra Part I*。我们先定义必要的内容。

6.2.1 行列关系与比较定理

定义 6.8. (行群和列群) 对于Young表 t ，定义**行群** (row-stabilizer) 和**列群** (column-stabilizer)

$$\begin{aligned} R_t &= \{\pi \in S_n | \pi \text{ 保持每行元素不变}\} \\ C_t &= \{\pi \in S_n | \pi \text{ 保持每列元素不变}\} \end{aligned}$$

或者定义为 (Sagan) :

$$R_t = S_{R_1} \times S_{R_2} \times \cdots \times S_{R_l}, \quad C_t = S_{C_1} \times \cdots \times S_{C_k}.$$

并且定义行交错和列交错群

$$r_t = \sum_{\pi \in R_t} \text{sgn}(\pi) \pi, \quad c_t = \sum_{\pi \in C_t} \text{sgn}(\pi) \pi.$$

此处参考熊锐的笔记[17]，证明的关键是如下的性质。

命题 6.9. 关于行群与列群，有如下的结论

1. $\pi R_t \pi^{-1} = R_{\pi t}$, 且当 $\pi \in R_t$ 时, $R_t = R_{\pi t}$;
2. $\pi C_t \pi^{-1} = C_{\pi t}$, 且当 $\pi \in C_t$ 时, $C_t = C_{\pi t}$;
3. **(行列关系)** 如果 t, s 为同型的杨表, 那么下列两情况必有且仅有一个成立:

$$C_t \cap R_s \text{ 含对换}; \quad C_t t \cap R_s s \neq \emptyset.$$

4. **(比较定理)** 如果按照字典序 $t < s$, 那么 $C_t \cap R_s$ 含对换。

证明. 前两条是显然的。行列关系: 注意到不含对换当且仅当 s 同一行的不同元素在 t 中在不同列。而这一条件说明可以变换对 t 作 C_t 变换, 对 s 作 R_s 变换化成同一个杨表, 具体来说先将 t 的第一行所有元素变成 s 第一行的所有元素, 然后再变动第二行以下的行, 以此类推, 每次不会变动已经完成的行, 最终和 s 每行元素都相同。反之亦然。

为了看到比较定理，假设在第 i 行 t 的元素开始少于 s 的元素，注意到根据前两条，和类似『行列关系』的算法，可以假设 s, t 前 $i-1$ 行都相同，这样， s 第 i 行必定有元素落在 t 的同一行。□

命题 6.10. 关于行和与列交错和，有如下的结论

1. $\pi r_t \pi^{-1} = r_{\pi t}$ ，且当 $\pi \in R_t$ 时， $\pi r_t = r_t \pi = r_t$ ，从而 $r_{\pi t} = r_t$;
2. $\pi c_t \pi^{-1} = r_{\pi t}$ ，且当 $\pi \in R_t$ 时， $\pi c_t = c_t \pi = \text{sign}(\pi) r_t$ ，从而 $c_{\pi t} = c_t$;
3. **(行列关系)** 如果 t, s 为同型的杨表，则：

$$C_t \cap R_s \text{ 含对换} \iff c_t r_s = 0.$$

4. **(比较定理)** 如果按照字典序 $t < s$ ，那么 $c_t r_s = 0$ 。

证明. 前两条同样是显然的。根据上一个命题，在前一种情况，可以直接计算 $c_t r_s = c_t$ (对换)， $r_s = -c_t r_s$ ，故 $c_t r_s = 0$ ，在后一种情况，存在 $c \in C_t, r \in R_s$ 使得 $c_t = r_s$ ，故 $c_t r_s = c_{ct} r_{rs} = c_{rs} r_{rs}$ ，故只要说明对任意杨表 tt ， $c_t r_t \neq 0$ 即可，考虑常数项即可。比较定理则是类似的。□

比较定理还可以放松字典序的条件，使用支配序，这样算法需要修改成将 t 第一行放置在 s 行数尽可能小的数。有了上述准备工作，我们下面开始最终定理的陈述。

对于任意杨图 t 定义 $e_t = c_t r_t$ 。(在 Sagan 书中， e_t 称之为**多报**(polytabloid)，定义为 $e_t = c_t \{t\}$ 。) 显然我们有 $e_{\pi t} = \pi e_t$ 。

根据 Sagan 的定义， $t = \begin{smallmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}$ ，对应的

$$e_t = \frac{\overline{4 \ 1 \ 2}}{\overline{3 \ 5}} - \frac{\overline{3 \ 1 \ 2}}{\overline{4 \ 5}} - \frac{\overline{4 \ 5 \ 2}}{\overline{3 \ 1}} + \frac{\overline{3 \ 5 \ 2}}{\overline{4 \ 1}},$$

而熊锐的定义可得 $e_t = e - (3, 4) - (3, 5) - (1, 5) + (1, 2, 4) + (3, 5, 4) + (1, 3, 5) - (1, 2, 4, 3) - (1, 5, 2, 4)$ 。

6.2.2 S^n 的不可约表示

定理 6.11. S_n 的所有不可约表示都同构于 $\mathbb{C}[S_n]e_t$ ，同构当且仅当型相同。

$S^\lambda := \mathbb{C}[S_n]e_t$ 也被称为 λ 对应形状 t 的**Specht模**，显然该模是循环 S_n -模。为证明这个定理，我们需要一个技术化的引理。

引理 6.12. 对于任意 $x \in S_n$,

- **(行列关系)** $c_t x r_t \in \mathbb{C} c_t r_t = \mathbb{C} e_t$.

- **(比较定理)** 如果按照字典序 $t < s$, 那么 $c_r x r_s = 0$.

证明. 行列关系: 注意到 $c_t x r_t = c_t r_{xt} x$, 如果 $c_t r_{xt} = 0$, 那么已经完成证明, 否则根据上面的命题,

$$C_t t \cap R_{xt}(xt) = C_t t \cap x R_t x^{-1}(xt) \neq \emptyset,$$

这样 $x \in C_t R_t$, 这样 x 被两边吸收得证。『比较定理』证明同样, 不过更加简单。□

推论 6.13. 对于任意 $x \in S_n$,

- **(行列关系)** $e_t x e_t \in \mathbb{C} e_t$.
- **(比较定理)** 如果按照字典序 $t < s$, 那么 $e_r x e_s = 0$.

下面我们开始证明定理:

证明. 下面我们开始证明。

- $\mathbb{C}[S_n]e_t$ 是不可约表示。这是因为任何非零子模, 根据推论行列关系 $e_t M \subseteq \mathbb{C} e_t$, 如果 $e_t M = \mathbb{C} \cdot e_t$, 那么 $e_t \in M$ 故 $M = \mathbb{C}[S_n]e_t$ 。如果 $e_t M = 0$, 这说明 $M \cdot M = 0$, 但是根据 Maschke 定理, M 是 $\mathbb{C}[S_n]$ 的直和项, 内含幂等元, 这是不可能的。
- 同型的 t, s 对应的 $\mathbb{C}[S_n]e_t$ 和 $\mathbb{C}[S_n]e_s$ 是同构的。显然, 二者仅仅相差一个共轭。
- 不同型的 t, s 对应的 $\mathbb{C}[S_n]e_t$ 和 $\mathbb{C}[S_n]e_s$ 是不同构的。根据上面推论的比较定理, $e_t[S_n]e_s = 0$, 但和第一段相同的理由 $e_t[S_n]e_t \neq 0$ 。
- $\mathbb{C}[S_n]e_t$ 给出所有不可约表示。因为特征的理论, 不可约表示的数目小于等于共轭类数目, 熟知杨图数目和分拆数相等, S_n 的共轭类和分拆数也相等。□

6.2.3 标准样表和 S^λ 的基

这里我们继续使用 Sagan 的符号 e_t , 这个符号的特点是更加具体化。

通常生成 $S^\lambda := \mathbb{C}[S_n]e_t$ 的多报不是独立的, 我们可以选找一个合适的基使得计算变的容易。在这里我们需要引进标准样表。事实上, 我们有

定理 6.14. $\{e_t | t \text{ 是一个型为 } \lambda \text{ 的标准样表}\}$ 是一个 S^λ 的基, 它们是独立的并且它们张成 S^λ 。

这个定理的证明参见 Sagan [1] 第67-70页以及第73 页。由此我们可得,

定理 6.15. 对任意拆分 $\lambda \vdash n$,

1. $\{e_t | t \text{ 是一个型为 } \lambda \text{ 的标准样表}\}$ 是一个 S^λ 的基
2. $\dim S^\lambda = f^\lambda$,
3. $\sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!$.

证明. 前两者显然, 而第三项是因为命题5.28中的第二项 $\sum_i (\dim V^{(i)})^2 = |G|$. \square

在 Sagan 书中的第 2.7 节中, 他还给出了具体的方法求出所有的矩阵数组。

6.3 分支规则

分支规则(Branching rule)是帮助我们解决 S_n 的限制表示和诱导表示。

我们定义内角点(inner corner)和外角点(outer corner)分别为杨图中去除或删去某个点以后依然是杨图的点 (和淘气游戏小节定义一样)。

比如 $\lambda = (5, 4, 4, 2)$ 中的点 $(1, 5), (3, 4), (4, 2)$ 为内角点; 而 $(1, 6), (2, 5), (4, 3)$ 和 $(5, 1)$ 为外角点。

减去内角点的图记为 λ^- , 而增加外角点的图记为 λ^+ 。于是我们有

引理 6.16.
$$f^\lambda = \sum_{\lambda^-} f^{\lambda^-}.$$

这是因为数字 n 只能放在内角点。

由此我们得到分支规则定理:

定理 6.17. (分支规则) 如果 $\lambda \vdash n$, 则

1. $S^\lambda \downarrow_{S_{n-1}} \cong \oplus_{\lambda^-} S^{\lambda^-}$ 以及
2. $S^\lambda \uparrow_{S_{n-1}} \cong \oplus_{\lambda^+} S^{\lambda^+}$.

证明从略, 可参见 Sagan [1] 第77-78 页。

6.3.1 广义杨表

广义杨表就是可重复的杨表，也就是半标准样表（可重复）和接近标准样表（可以是非 $[n]$ 元素）的推广（弱化版本）。称一个广义杨表 T 的内容(content)为组合 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ ，其中 μ_i 表示 i 出现的次数。令

$$\mathcal{T}_{\lambda\mu} := \{T | T \text{ 拥有型 } \lambda \text{ 和内容 } \mu\}.$$

举例来说， $T = \begin{smallmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}$ 是一个型为 $(3, 2)$ ，而内容为 $(2, 0, 1, 2)$ 的广义杨表。

事实上 $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$ 同构与 M^μ 。我们常常讨论的内容就是 $\mu = (1^n)$ 。

命题 6.18. 对任意分拆 λ ， $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{\lambda\mu}]$ 同构与 M^μ 。

我们定义一个广义杨表是半标准的当且仅当是行弱递增，而列严格递增。这在之前已经提到。我们记 $\mathcal{T}_{\lambda\mu}^0$ 为半标准 λ -杨表拥有内容 μ 的集合。

继续定义 **Kostka 数** 为 $K_{\lambda\mu} = |\mathcal{T}_{\lambda\mu}^0|$ 。Sagan 在 2.11 给出一个重要定理

定理 6.19. (Young规则)

$$M^\mu \cong \bigoplus_{\lambda} K_{\lambda\mu} S^\lambda.$$

我们可以限定 $\lambda \triangleright \mu$ 。

例 6.20. 假设 $\mu = (2, 2, 1)$ ，则所有的 $\lambda \triangleright \mu$ 以及相关的半标准样表如下：

$$\begin{array}{l} \lambda^1 = (2, 2, 1) \quad \lambda^2 = (3, 1, 1) \quad \lambda^3 = (3, 2) \quad \lambda^4 = (4, 1) \quad \lambda^5 = (5) \\ T: \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 2 & & \\ 3 & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \\ & & \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 2 \\ & 3 & & \end{array} \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ & & & & \end{array} \\ & \begin{array}{ccc} & & \\ & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \\ & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 & 3 \\ & 2 & & \end{array} \end{array}$$

于是

$$M^{(2,2,1)} \cong S^{(2,2,1)} \oplus S^{(3,3,1)} \oplus 2S^{(3,2)} \oplus 2S^{(4,1)} \oplus S^{(5)}.$$

6.4 S_n 的特征标公式

6.4.1 Murnaghan-Nakayama 规则

为了计算特定杨表对应的不可约表示的特征标，由 **Murnaghan-Nakayama** 规则给出了经典的公式。这个公式有两种形式，称之为非递归形式和递归形式。

我们先定义边界带表 $\text{BST}(\lambda, \mu)$ (*border-strip tableau*)，它的形状为 λ ，内容为 μ 。且任意一个内容 i 在表中的形状构成斜角勾 (skew hook, rim hook, connected ribbon)，即是之字形，线联通但不存在 2×2 的方块。我们定义一个内容的高度，或者斜角勾的腿长 (leg length) 为 $\text{ht}(i) = \text{ll}(i) = (i \text{ 的所在行总数}) - 1$ 。

定理 6.21. (非递归形式)

$$\chi_\mu^\lambda = \sum_{T \in \text{BYT}(\lambda, \mu)} (-1)^{\text{ht}(T)},$$

其中 $\text{BYT}(\lambda, \mu)$ 为形状为 λ ，内容为 μ 边界带表。 $h(T)$ 是半标准样表中每个数字的高度之和。

例 6.22. 考虑 $\lambda = (5, 2, 1)$ ，而 $\mu = (3, 3, 3, 1)$ ，也就是说这个半标准杨表由三个 1，2，3 和一个 4 构成。我们可以列出所有的可能性

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & & & \\ 2 & & & & \end{array}, \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & & & \\ 4 & & & & \end{array}, \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & & & \\ 3 & & & & \end{array},$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & & & \\ 1 & & & & \end{array}, \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & & & \\ 1 & & & & \end{array}, \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & & & \\ 1 & & & & \end{array}.$$

对应的每个杨表的高度为

$$\begin{aligned} h(T_1) &= 0 + 1 + 0 + 0 = 1 \\ h(T_2) &= 1 + 0 + 0 + 0 = 1 \\ h(T_3) &= 1 + 0 + 0 + 0 = 1 \\ h(T_4) &= 2 + 0 + 0 + 0 = 2 \\ h(T_5) &= 2 + 0 + 0 + 0 = 2 \\ h(T_6) &= 2 + 1 + 0 + 0 = 3 \end{aligned}$$

由此得到

$$\chi_\mu^\lambda = 3 \times (-1)^1 + 2 \times (-1)^2 + (-1)^3 = -2.$$

定理 6.23. (递归形式)

$$\chi_{\mu}^{\lambda} = \sum_{\xi \in \text{BS}(\lambda, \mu_1)} (-1)^{\text{ht}(\xi)} \chi_{\mu \setminus \mu_1}^{\lambda \setminus \xi},$$

其中 $\text{BS}(\lambda, \mu_1)$ 为边界带图，它的形状为 λ ，并且去除边界之字形 μ_1 。 $\text{ht}(\xi)$ 是指 ξ 的高度，即所占行数减一。

例 6.24. 考虑 $\lambda = (4, 4, 3)$, $\mu = (5, 4, 2)$ ，则 $\text{BS}(\lambda, 5)$ 有两种形式

			×	×			
×	×	×					

,

			×				
			×	×			
		×	×				

前者对应的 $\text{ht}(\xi_1) = 1$ 后者为 $\text{ht}(\xi_2) = 2$ ，由此可以得到

$$\chi_{\mu}^{\lambda} = (-1)^1 \chi_{(4,2)}^{(4,2)} + (-1)^2 \chi_{(4,2)}^{(3,2,1)}.$$

前者又能够生成一种 $\text{BS}((4,2), 4)$ 形，对应的高度为1，即

	×	×	×				
	×						

因此 $\chi_{(4,2)}^{(4,2)} = -\chi_{(2)}^{(1,1)} = -(-\chi_{(0)}^{(0)}) = 1$ 。而后者不能继续生成边界带图，因此 $\chi_{(4,2)}^{(3,2,1)} = 0$ ，所以 $\chi_{\mu}^{\lambda} = -1$ 。

6.4.2 Roichman公式

另外，在 Adin 和 Roichman 的论文[4]中的第三节内容中，还介绍了一种 Roichman 给出的新的方法。

对任意一个置换 π ，我们称它是 **μ -单峰的** (μ -unimodal)当且仅当， $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_t)$ 这一构成 (composition, 区别于拆分，它不需要递减性) 将其组成的部分都是单峰的 (先减小后增大)。

比如，例子 $\pi = 936871254$ ，它拥有下降集 $\text{Des}(\pi) = \{1, 4, 5, 8\}$ ，因此它是 $(4, 3, 2)$ -单峰的，但不是 $(5, 4)$ 单峰的。这是因为对于前4位数，先减小后增大，之后的三位也满足这样的单峰性，最后的 54 是单调的也是单峰的。

我们将其推广到标准样表的 μ -单峰性。首先杨表的下降集是沿着杨表标定的数字往下运动的位置。比如

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & 9 \\ \hline 6 & 8 & \\ \hline 7 & & \\ \hline \end{array}$$

这一标准样表的下降集为 $\text{Des}(T) = \{1, 4, 5, 6\}$ 。那么标准杨表的 μ -单峰性因此也可以定义为组成部分先减小后增大的性质，比如上述例子是 $(4, 5)$ -单峰的但非 $(5, 4)$ -单峰的。

令 $\lambda \vdash n$ ，且 μ 是 n 的一个构成。令 χ^λ 为不可约的 S_n 特征标，对任意 S_n 的特征标 χ ，令 χ_μ 为它在共轭类型为 μ 的数值。也就是说 χ_μ^λ 表示的是一个特征标表 (λ, μ) 位置的特征。ROICHMAN [5] 给出了如下计算公式

定理 6.25. (Roichman)

$$\chi_\mu^\lambda = \sum_{T \in U_\mu(\lambda)} (-1)^{|\text{Des}(T) \cap I(\mu)|},$$

其中 $U_\mu(\lambda)$ 是所有 μ -单峰形状为 λ 的标准杨表集合， $I(\mu) := [n] \setminus S(\mu)$ ，而

$$S(\mu) := \{\mu_1, \mu_1 + \mu_2, \dots, \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = n\} \subseteq [n].$$

6.5 Okounkov-Vershik方法

Okounkov与Vershik[13]提供了给出有限对称群的复不可约表示的新方法，他们给出了更为直接的不可约表示和标准样表的关系。在 Math StackExchange [12] 中列举了可供参考的文献有M. K. Srinivasan 的[笔记](#)以及ZAGIER的书[Graphs on Surfaces and their applications](#)的关于表示论的附录部分[Applications of the representation theory of finite groups](#) (1.2)。其中 ZAGIER 的书还给出了非常简要的有限群表示的完整脉络。这一方法用到 Nakayama 规则（参见Sagan [1] 4.10）。

7 对称函数

我们在前文已经定义了生成函数，这里不再赘述。一个序列 $(a_n)_{n \geq 0}$ 的生成函数是幂级数 $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ 。如果 a_n 表示一些组合对象，那么 $f(x)$ 成为这些对象的生成函数。

通常我们也能用 $[x^n]f(x)$ 来表示 a_n 。

注记 7.1. 所有的生成函数构成形式幂级数环

$$\mathbb{C}[[x]] = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n x^n \mid a_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

形式幂级数可逆当且仅当其常数项非零。

下面这个著名的定理归功于欧拉，

定理 7.2. 分拆的生成函数是

$$\sum_{n \geq 0} p(n) x^n = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdot \dots$$

事实上， $\sum_{n \geq 0} p(n) x^n = (x^0 + x^1 + x^{1 \times 2} + \dots)(x^0 + x^2 + x^{2 \times 2} + \dots) \dots$ ，每一项 $x^{i \times j}$ 分别表示 $i^j \in \lambda$ 。

对于生成函数，我们定义它的次数为最小非零项的次数。

7.1 对称函数环

令 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots\}$ 为无穷变量集， $\mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ 为形式幂级数。我们称单项式 $x_{i_1}^{\lambda_1} \cdots x_{i_n}^{\lambda_n}$ 的次数 (degree) 为 $n := \sum_i \lambda_i$ ，且称 $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ 是齐次的当且仅当其所有的单项式次数相等。对任意次数为 n 的齐次形式幂级数 $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$ ，存在一个自然地 S_n 群作用，即

$$\pi f(x_1, x_2, x_3, \dots) = f(x_{\pi 1}, x_{\pi 2}, x_{\pi 3}, \dots),$$

如果 $i > n$ ，则定义 $\pi i = i$ 。

定义 7.3. 令 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l) \vdash n$ ，则 λ 对应的单项对称函数 (monomial symmetric function corresponding to λ) 是

$$m_\lambda = m_\lambda(\mathbf{x}) = \sum x_{i_1}^{\lambda_1} x_{i_2}^{\lambda_2} \cdots x_{i_l}^{\lambda_l},$$

求和符号遍及所有不相等的次数为 $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ 的单项式。

比如，容易知道

$$m_{(2,1)} = x_1^2 x_2 + x x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + \cdots.$$

显然 m_λ 是齐次的次数为 n 的幂级数。

定义 7.4. 对称函数环是 $\Lambda = \Lambda(\mathbf{x}) = \mathbb{C}m_\lambda$, 也就是说它是由所有 m_λ 张成的向量空间。

注记 7.5. Λ 是环而不仅仅是向量空间，因为它的乘法是封闭的。然后 $\Lambda \subsetneq \mathbb{C}[[\mathbf{x}]]$, 这是因为有些形式幂级数并不在对称函数环中，比如 $\prod_{i \geq 1} (1 + x_i)$, 它并不能携程 m_λ 的有限线性组合。

进一步地， Λ 是分次环(graded ring)。事实上，我们有如下分解：

$$\Lambda = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n,$$

其中 Λ^n 是有 n 次单项对称函数 m_λ 张成。而因为

$$f \in \Lambda^n, g \in \Lambda^m \implies fg \in \Lambda^{n+m}.$$

因此 Λ 是分次环。由于 m_λ 是独立的，因此我们有如下结果

命题 7.6. 向量空间 Λ^n 拥有基 $\{m_\lambda: \lambda \vdash n\}$, 因此其维度为 $p(n)$, 即分拆数。

Λ^n 还有其他的基，我们将继续介绍。

定义 7.7. (一些基础对称函数)

i. n 次方和对称函数是 $p_n = m_{(n)} = \sum_{i \geq 1} x_i^n$.

ii. n 次初等对称函数是 $e_n = m_{(1^n)} = \sum_{i_1 < \dots < i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}$.

iii. n 次完全其次对称函数 $h_n = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda = \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_n} x_{i_1} \cdots x_{i_n}$.

命题 7.8. 我们有如下的生成函数

$$\begin{aligned} E(t) &:= \sum_{n \geq 0} e_n(x) t^n = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i t), \\ H(t) &:= \sum_{n \geq 0} h_n(x) t^n = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x_i t}, \\ P(t) &:= \sum_{n \geq 1} p_n(x) t^n = \ln \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x_i t}. \end{aligned}$$

对于这些基础对称函数 $f = p, e, h$, 他们是可乘的(multiplicative), 定义

$$f_{\lambda} = f_{\lambda_1} f_{\lambda_2} \cdots f_{\lambda_l}.$$

于是

定理 7.9. $\{p_{\lambda} | \lambda \vdash n\}, \{e_{\lambda} | \lambda \vdash n\}, \{h_{\lambda} | \lambda \vdash n\}$ 都是 Λ^n 的基。

证明参见 Sagan [1] 4.3节第154-155页。

7.2 Schur 函数

Schur 函数将是第五个 Λ^n 的基。这个基非常重要, 因为它们连接了 S_n 的不可约表示以及杨表。事实上, 它们是千变万化的, 有许多不同的方式来定义它们。我们在此使用组合的方式定义。

令 $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_l)$ 为任意的 n 的构成 (非分拆), 则它对应的单项式为

$$\mathbf{x}^{\mu} := x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \cdots x_l^{\mu_l}.$$

现在我们考虑广义杨表 T (型为 λ)。它也拥有重量(weight), 即

$$\mathbf{x}^T := \prod_{(i,j) \in \lambda} x_{T_{i,j}} = \mathbf{x}^{\mu},$$

其中 μ 是 T 的内容。

比如, 对于广义杨表 $T = \begin{smallmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}$, 我们有 $\mathbf{x}^T = x_1^2 x_3 x_4^2$.

定义 7.10. 给定一个分拆 $\lambda \vdash n$, 则相对应的 Schur 函数为

$$s_{\lambda}(\mathbf{x}) = \sum_T \mathbf{x}^T,$$

其中, 求和是对所有的半标准 λ -杨表 T 。

例 7.11. 如果 $\lambda = (2, 1)$, 则可能的杨表如下:

$$T: \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 3 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 3 \end{smallmatrix}, \dots, \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 4 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 2 \end{smallmatrix}, \dots,$$

因此

$$s_{(2,1)}(\mathbf{x}) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + \cdots + 2x_1 x_2 x_3 + 2x_1 x_2 x_4 + \cdots.$$

注意 7.12. 如果 $\lambda = (n)$, 则它是一个一行半标准杨表, 也就是一个弱增长的整数。因此这等价于反向的 n 份的分拆, 也就是说, $s_{(n)}(x) = h_n(x)$.

如果 $\lambda = (1^n)$, 则这是一个从上到下的递增序列, 因此这是 n 项的严格分拆, $s_{(1^n)}(x) = e_n(x)$.

如果分拆是任意的, 则 $[x_1 x_2 \cdots x_n] s_\lambda(x) = f^\lambda$.

命题 7.13. Schur 函数 $s_\lambda(x)$ 是对称函数。

表示论的证明需要用到 Kostka 数和 Young 规则。而 Knuth 给出的组合证明是构造性的, 参见 Sagan [1] 第156-157 页。

命题 7.14. ([1], Prop. 4.4.3) $s_\lambda = \sum_{\mu \leq \lambda} K_{\lambda\mu} m_\mu$, 其中求和走遍所有的分拆 μ 以及 $K_{\lambda\lambda} = 1$ 。

推论 7.15. 集合 $\{s_\lambda | \lambda \vdash n\}$ 是 Λ^n 的一个基。

Schur函数还有其他定义, 参见[1]中的4.6 节。

7.2.1 Jacobi-Trudi 行列式

行列式公式给出了标准样表个数的计算公式, 类似地, Jacobi-Trudi 行列式给出了一个 s_λ 的初等和完整的对称函数的表达式。Jacobi 首先得到这一结果, 他的学生 Trudi 随后 (subsequently) 简化了这一结果。

这一结果是注意7.12中 $s_{(n)}(x)$ 与 $s_{(1^n)}$ 的推广, 它们是行列式中 1×1 的形式。

定理 7.16. (Jacobi-Trudi 行列式, [1] thm 4.5.1) 令 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_l) \vdash n$, 则我们有

$$s_\lambda = |h_{\lambda_i - i + j}|, \text{ 且 } s_{\lambda'} = |e_{\lambda_i - i + j}|,$$

其中 λ' 是 λ 的共轭, 行列式均是 $l \times l$ 的。

证明的方法是在二维个点双重计数, 使用 e -标记和 h -标记。其中 e -标记只标记向右的步数 (是第几步), 而 h -标记只标记往右步数的高度 (在第几行)。由此得到对应关系。

7.3 特征映射

令 $R^n = R(S_n)$ 为 S_n 的类函数(space of class functions)的空间。这个空间 R^n 和 Λ^n 有着非常紧密的关系。首先 $\dim(R^n) = \dim(\Lambda^n) = p(n)$, 所以作为向量空间他们是同构的。我们已经定义了 R^n 的内积使得对任意不可约的 S_n 的特征标都有一个正交正规的基。由此, 我们可以定义 Λ^n 的内积:

$$\langle s_\lambda, s_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$$

且是对第一项线性, 第二项是共轭线性的 (sesquilinear)。由此我们可以定一个映射, 使得它保持内积。

定义 7.17. 特征映射是 $\text{ch}^n: R^n \rightarrow \Lambda^n$, 其中 $\text{ch}^n(\chi) = \sum_{\mu \vdash n} z_\mu^{-1} \chi_\mu p_\mu$, 其中 z_μ 是形如 μ 的中心化子大小, χ_μ 是 χ 在共轭类 μ 的取值。

我们可以容易验证 ch^n 是线性的, 并且对于任意不可约的特征标, $\text{ch}^n(\chi^\lambda) = s_\lambda$.

命题 7.18. ch^n 是 $R^n \rightarrow \Lambda^n$ 的等距映射。

现在考虑 $R = \bigoplus_n R^n$, 它是同构于 Λ 的, 其中映射是 $\text{ch} = \bigoplus_n \text{ch}^n$. 我们已经知道 Λ 有分次性质, 事实上 R 也是分次环。我们需要定义 S_n 和 S_m 的特征标 χ 和 ψ 的乘积

$$\chi \cdot \psi = (\chi \otimes \psi) \uparrow^{S_{n+m}}.$$

于是我们可以得到一个代数同构:

定理 7.19. 特征映射 $\text{ch}: R \rightarrow \Lambda$ 是一个代数同构。

本小节的全部证明可以参见 Sagan [1] 4.7 节。

7.4 Littlewood-Richardson规则

Littlewood-Richardson规则给出了一个Schur 函数的乘积的系数的组合解释。这相当于 Young 规则的推广。

我们已经知道 $M^\mu \cong \oplus_\lambda K_{\lambda\mu} S^\lambda$ 。我们可以把这个公式重新解释为特征标和对称函数。如果 $\mu \vdash n$ ，则 M^μ 是一个诱导特征标 $1_{S_\mu} \uparrow^{S_n}$ 的模。由此，我们有

$$1_{S_{\mu_1}} \cdots 1_{S_{\mu_m}} = \sum_{\lambda} K_{\lambda\mu} \chi^\lambda,$$

由此对应的对称函数满足

$$s_{(\mu_1)} \cdots s_{(\mu_m)} = \sum_{\lambda} K_{\lambda\mu} s_\lambda.$$

于是如果 $s_\mu s_\lambda = \sum_{\lambda} c_{\mu\nu}^\lambda s_\lambda$ ，我们可以得到

$$\chi^\mu \cdot \chi^\nu = \sum_{\lambda} c_{\mu\nu}^\lambda \chi^\lambda,$$

其中 $|\mu| + |\nu| = n$ 。这个 $c_{\mu\nu}^\lambda$ 称为 Littlewood-Richardson 系数。

命题 7.20. 定义 $s_\lambda(x, y) = s_\lambda(x_1, x_2, \dots, y_1, y_2, \dots)$ 。则

$$s_\lambda(x, y) = \sum_{\mu \subseteq \lambda} s_\mu(x) s_{\lambda/\mu}(y).$$

并且，如果 $c_{\mu\nu}^\lambda$ 是 Littlewood-Richardson 系数，其中 $|\lambda| = |\mu| + |\nu|$ ，则

$$s_{\lambda/\mu} = \sum_{\nu} c_{\mu\nu}^\lambda s_\nu.$$

$c_{\mu\nu}^\lambda$ 的计算需要用到 Ballot 序列。这一序列我们已经提到，是类似于选举的序列，其中 1 得票最多，2 其次。Littlewood-Richardson 给出如下定理

定理 7.21. (Littlewood-Richardson 规则) $c_{\mu\nu}^\lambda$ 的值等于符合下列条件的半标准杨表的个数

1. T 拥有型 λ/μ 且内容为 ν ，
2. 行序列（多行顺序接上） π_T 是一个逆 Ballot 序列。

本节最后有个很好的例子，或者参考[维基百科的例子](#)。

7.5 拟对称函数

这一部分关于拟对称函数 (quasi-symmetric function) 的基本内容主要参考 Mason 的博士论文 [14] 的第一节。

拟对称函数是对称函数的推广，它对于每个递增下标的单项式对应每个不定项的次数内容相同。比如，

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2^5 + x_1^3 x_3^5 + x_2^3 x_3^5$$

是一个拟对称函数，但

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2^5 + x_1^3 x_3^5 + x_2^5 x_3^3$$

因为递增的下标对应的次数为 $(3,5)=(3,5) \neq (5,3)$ 。

它的生成元和 m_λ 以及 Schur 函数 s_λ 均有关系，这里仅仅介绍定义，推荐上述论文 [14]。

参考文献

1. B. E. Sagan, *The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions* (2nd Ed.), Graduate Texts in Math. 203, Springer, New York, 2001.
2. R. Adin, Lecture Notes on Symmetric Groups (Hebrew), u.math.biu.ac.il.
3. R. M. Adin and Y. Roichman, *Enumeration of Standard Young Tableaux*, in: Miklos Bona (Ed.), *Handbook of Enumerative Combinatorics*, Chapman and Hall/CRC Press, 2015. arXiv:[1408.4497](https://arxiv.org/abs/1408.4497).
4. R. M. Adin and Y. Roichman. *Matrices, characters and descents*. Linear Algebra and its Applications,(2015), 381-418.
5. Y. Roichman, A recursive rule for Kazhdan–Lusztig characters, Adv. Math. 129 (1997) 24–45.
6. R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics* (Vol. 2), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
7. D. Stanton and D. White, *Constructive Combinatorics*, Undergraduate Texts in Math., Springer, New York, 1986.
8. C. Greene, A. Nijenhuis, and H. S. Wilf, A probabilistic proof of a formula for the number of Young tableaux of a given shape, Adv. in Math. 31 (1979), 104–109.
9. D. S. Franzblau and D. Zeilberger, A bijective proof of the hook-length formula, J. Algorithms 3 (1982), 317–343.
10. J.-C. Novelli, I. Pak, and A. V. Stoyanovskii, A direct bijective proof of the hook-length formula, Discrete Math. and Theor. Comp. Sci. 1 (1997), 53–67.
11. A. H. Morales, I. Pak, and G. Panova, Hook formulas for skew shapes I. q-analogues and bijections. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 154 (2018), 350–405.
12. Theo, [Book recommendations for reading A. Okounkov and A. Vershik’s approach](#), MathSE.
13. A. Okounkov and A. Vershik, A new approach to representation theory of symmetric groups, Selecta Math. (N.S.), 2, 581–605 (1996), *arXiv preprint math/0503040* (2005).
14. S. K. Mason, Recent Trends in Quasisymmetric Functions, arXiv preprint [arXiv:1810.07148](https://arxiv.org/abs/1810.07148).

15. 陈浩, [万花筒里的数学——反射群](#), 知乎专栏.
16. 好地方bug, [最长上升子序列问题和杨表](#), 知乎回答.
17. 熊锐, [对称群的表示](#), 熊锐的数学博客.

索引

0-Hecke monoid	22	G-module	44
affine reflection group	21	graded ring	70
algebra representation	46	group algebra	46
alternative group	6	group presentation	17
backward slide	33	G-submodule	48
Ballot sequence	26	hook length	37
basic skew strip	37	hook shape	34
border-strip tableau	66	induced representation	57
braid relation	17	induction of representation	57
branching rule	64	inner corner	32, 64
Catalan number	35	insertion tableau	28
Cayley theorem	46	inversion	5
centralizer	43	inversion number	5
character	52	inversion set	5
character table	53	involution	4
chracteristic mapping	73	irreducible G-module	48
class function	53	Jacobi-Trudi determinant	72
column-stabilizer	61	jeu de taquin	33
commutant algebra	51	k-increasing	30
composition	67	Kostka number	65
content of generalized Young tableau	65	left descent set	19
coset representation	46	left weak order	23
Coxeter group	17	left-to-right-maxima	13
Coxeter matrix	17	length of a permutation	18
Coxeter monoid	22	line convex	24
Coxeter-Dynkin diagram	19	Littlewood-Richardson rule	73
cycle number	10	longest increasing subsequence	29
cycle type	4	Mahonian distribution	16
cyclic G-module	60	major index	15
defining representation	44–45, 47	Maschke theorem	50
degree of representation	43	matrix representation	43
descent number	14	monomial symmetric function	69
descent set	14, 19	Motzkin number	35
diagram	23	Murnaghan-Nakayama rule	66
dimension of representation	43	near Young tableau	27
Eulerian distribution	15	number of centralizers	43
evacuation tableau	31	odd permutation	6
even permutation	6	order polytope	26
exceedant number	14	ordinary diagram	25
exceedant set	14	orthogonal complement	49
expectation	11	outer corner	64
Ferrers diagram	25	$p(n)$	30
finite reflection group	20	partition	4, 25
forward slide	32	path connected	24
Frobenius reciprocity	58	permutation	4
general linear group	44	permutation matrix	44
general skew strip	37	permutation module	60
generalized permutation	31	permutation representation	45
generalized symmetric group	6	permutation statistics	9
generalized Young tableau	65	polytabloid	62
generating function of partition number	69	quasi-symmetric function	74
G-homomorphism	47	recording tableau	28

reduced representation	46	standard Young tableau	24
regular representation	45	Stirling number	11
restriction of representation	57	symmetric group	4
reversal	31	symmetric group over G	6
right descent set	19	SYT of skew shape diagram	38
ring hook shape	36	SYT of Young diagram	37
Robinson-Schensted-Knuth algorithm	27	λ -tabloid	59
Roichman formula	67	transposition	5
row equivalent	59	transversal	58
row insertion	27	truncated shape diagram	41
row-stabilizer	61	two-rowed shape	35
Schur function	71	μ -unimodal	67
Schur lemma	51	wreath product	6
semi-standard Young tableau	31	Young diagram	25
shifted diagram	25	Young lattice	26
shifted hook	40	Young rule	65
sign function	5	Young subgroup	59
sign representation	44	Young tableau	59
skew diagram	25	Young tabloid	47
Specht module	59, 62	zigzag shape	36